

Institut Villebon Georges Charpak

Licence 2^{ème} année

2025-2026

Thermodynamique

—

Cours en autonomie

Claire Marrache-Kikuchi

Ce polycopié vise à ce que l'apprentissage du cours puisse se faire en autonomie. Pour cela, le cours est classifié suivant ce que vous devez savoir et/ou savoir faire :

- Les définitions et les lois sont à connaître.
- Les sections ***Le cours en exemples*** sont des extensions du cours. Il s'agit de vous faire découvrir une propriété ou des exemples que vous devez connaître. Ils font donc intégralement partie du cours. Les réponses sont données à la fin de l'exemple.
- Les sections ***Application du cours*** donnent des exercices d'application directe du cours. Vous devez pouvoir les faire sans difficulté, mais les résultats ne sont pas à connaître. Les réponses sont données à la fin de l'exercice.
- Enfin, les sections ***Savoir faire*** récapitulent ce que vous devez savoir faire, section par section.

Bien entendu, si vous avez des questions, vous pouvez toujours me contacter :

Claire Marrache-Kikuchi
IJCLab
Bat 108
01 69 15 48 58
claire.marrache@universite-paris-saclay.fr

Chapitre 1

Dérivées partielles

Ce chapitre a pour but de vous donner les bases nécessaires à l'utilisation des dérivées partielles en physique. Vous verrez des notations plus rigoureuses en math.

1.1 Définition d'une dérivée partielle

Définition

Soit f une fonction de n variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

La dérivée partielle par rapport à la variable x_i est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

- ★ Les règles usuelles de la dérivation s'appliquent pour les dérivées partielles.
- ★ Cela revient à faire la dérivée par rapport à x_i , en gardant toutes les autres variables constantes.

1.2 Différentielle totale

Définition

Soit f une fonction de n variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

La différentielle totale de f est définie par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

- ★ Ainsi, la différentielle totale est la somme des dérivées partielles que multiplie la petite variation de la variable considérée.
- ★ De la définition de la différentielle totale, on voit également que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée de f par rapport à x_i en gardant toutes les autres variables constantes.

1.3 Exemples

Le cours en exemples 1 : Calcul de dérivées partielles

1. Soit $f(x, y) = 3x^2y^5 + 2$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Soit $f(x, y) = x^3 + y^2 + xy$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Soit $f(x, y, z) = 5x + y^2z + 36z$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.
4. Soit $f(T, P, V) = PV$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial T}$, $\frac{\partial f}{\partial P}$ et $\frac{\partial f}{\partial V}$.
5. Soit $f(T, P, V) = \frac{PV}{nRT}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial T}$, $\frac{\partial f}{\partial P}$ et $\frac{\partial f}{\partial V}$.

Réponse : 1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^5$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 15x^2y^4$. 2. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$. 3. $\frac{\partial f}{\partial x} = 5$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 36$. 4. $\frac{\partial f}{\partial T} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial P} = V$ et $\frac{\partial f}{\partial V} = P$. 5. $\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{nRT^2}{PV}$, $\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{nRT}{V}$ et $\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{nRT}{P}$.

Le cours en exemples 2 : Calcul de dérivées partielles

Soit $f(x, y, z) = 3x + 5y^3 + zy + 2$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.
2. Déterminer la différentielle totale df .

Réponse : 1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 15y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = y$. 2. $df = 3dx + (15y^2 + z)dy + ydz$.

Le cours en exemples 3 : Capacités thermiques

On a les identités thermodynamiques fondamentales :

$$dU = TdS - PdV$$

$$dH = TdS + VdP$$

1. Calculer $\frac{\partial U}{\partial S}$, $\frac{\partial U}{\partial V}$, $\frac{\partial H}{\partial S}$ et $\frac{\partial H}{\partial P}$.
2. On considère un unique composé, sans changement d'état. Dans le cas d'une transformation réversible ($\delta S_c = 0$), exprimer dU en fonction de c_v , T , P et V .
3. Exprimer c_v sous la forme d'une dérivée partielle de U , puis sous la forme d'une dérivée partielle de S .
4. De même, exprimer c_p sous la forme d'une dérivée partielle de H , puis sous la forme d'une dérivée partielle de S .

Réponse : 1. $\frac{\partial U}{\partial S} = T$, $\frac{\partial U}{\partial V} = -P$, $\frac{\partial H}{\partial S} = T$ et $\frac{\partial H}{\partial P} = V$. 2. $dU = TdS - PdV = c_v dT - PdV$. 3. Ainsi, $c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$. 4. De la même manière, $c_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$.

Chapitre 2

Analyse vectorielle

Ce chapitre a pour but de vous donner les bases d'analyse vectorielle. Dans le cadre de ce cours, nous aurons essentiellement besoin du gradient, de la divergence et du Laplacien, mais je vous donne également la notation d'autres opérateurs qui peuvent vous être utiles. Je me restreindrai à l'expression des opérateurs en coordonnées cartésiennes. Naturellement, ils peuvent également s'exprimer en coordonnées cylindriques ou sphériques, mais je n'en donnerai pas l'expression ici.

2.1 Notion d'orientation

En physique, on raisonne souvent sur des espaces orientés. Il est donc important de bien comprendre ce que l'on entend par là.

2.1.1 Contour orienté

Définition

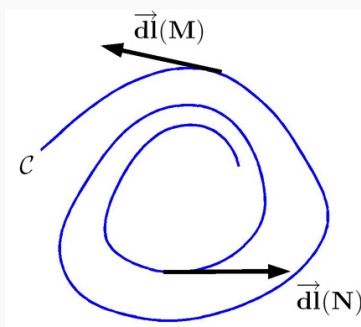


FIGURE 2.1 – Contour orienté par le vecteur $\vec{dl}$.

Soit un contour $\mathcal{C}$. On dit que ce **contour est orienté** lorsque l'on définit un sens de parcours. Une portion de contour est alors orientée par un vecteur $\vec{dl}$ qui a pour norme $\|\vec{dl}\|$, la longueur du contour considéré, et pour orientation la tangente à ce contour, parcourue dans le sens positif (figure 2.1).

2.1.2 Surface orientée

Définition

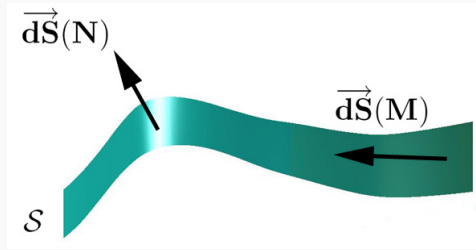


FIGURE 2.2 – Surface orientée par le vecteur $\vec{dS}$.

Soit une surface $\mathcal{S}$. On dit que cette **surface est orientée** lorsque l'on oriente l'espace. Une portion de surface est alors orientée par un vecteur $\vec{dS}$ qui a pour norme $\|\vec{dS}\|$, l'aire de la surface considérée, et pour orientation la normale à ce contour, orientée dans le sens positif (figure 2.2).

2.2 Opérateur Nabla

Définition

L'opérateur Nabla est un objet mathématique qui, dans un repère orthonormé cartésien, a pour coordonnées :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

- ★ L'opérateur Nabla est une notation pratique (quand on a l'habitude) pour écrire de manière compacte certaines équations. On n'est néanmoins pas obligé de l'utiliser !
- ★ On va voir dans la suite comment il s'utilise.

2.3 Gradient

Définition

Le **gradient** est un opérateur qui s'applique sur un **scalaire** A pour le **transformer en vecteur**. En coordonnées cartésiennes, on a au point M :

$$\vec{\text{grad}} A(M) = \vec{\nabla} A(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(M) \\ \frac{\partial A}{\partial y}(M) \\ \frac{\partial A}{\partial z}(M) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

- ★ Le gradient rend compte de la variation de la grandeur scalaire A dans l'espace. Le gradient indique si A varie pas, un peu ou beaucoup selon les 3 directions de l'espace.
- ★ Dans une direction, le gradient est un vecteur orienté dans la direction des A croissants.

★ On voit que le gradient de A peut s'exprimer comme une "multiplication" de l'opérateur nabla par A .

Le cours en exemples 4 : Calcul de gradients

Calculer le gradient des grandeurs scalaires suivantes :

1. $P(x) = 50x + 3$.
2. $T(x, y, z) = 5x + y^2 + 36z$.
3. $U(x, y, z) = -20z$.
4. $f(x, y, z) = 3x^2y^5 + 2$.

Réponse : 1. $\vec{\text{grad}}P = 50\vec{u}_x$. 2. $\vec{\text{grad}}T = 5\vec{u}_x + 2y\vec{u}_y + 36\vec{u}_z$. 3. $\vec{\text{grad}}U = -20\vec{u}_z$. 4. $\vec{\text{grad}}f = (6xy^5, 15x^2y^4, 0)$.

Propriété

Le gradient $\vec{\text{grad}}A$ est orthogonal en tout point aux **surfaces de niveau** (ou lignes équipotentielles) $A(M)=\text{constante}$.

Le cours en exemples 5 : Lignes de niveau et gradient

Tracer qualitativement le gradient des courbes de niveau de la figure 2.3.

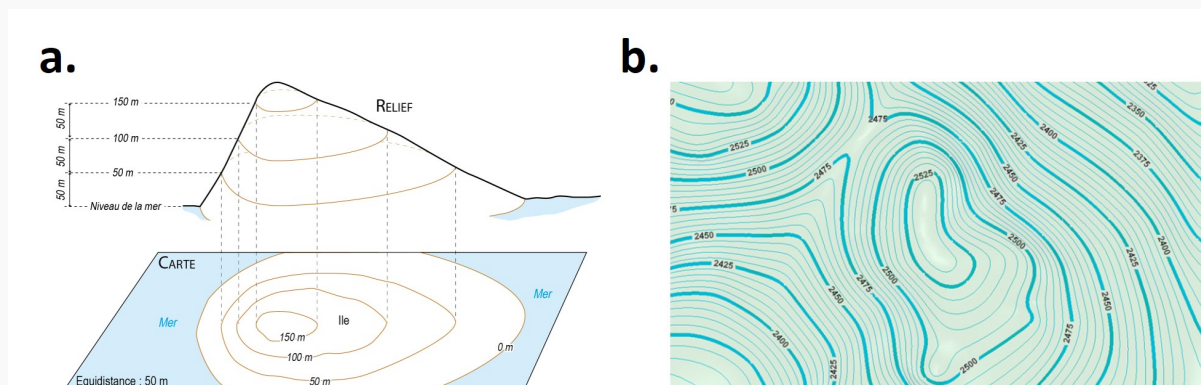


FIGURE 2.3 – **a.** Lignes de niveau d'une île. Source : dei.hypotheses.org. **b.** Lignes de niveau. Source : uncailloudanslachaussure.ch.

2.4 Divergence

Définition

La **divergence** est un opérateur qui s'applique sur un **vecteur** $\vec{A}$ pour le **transformer en scalaire**. En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\operatorname{div} \vec{A}(M) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M) = \frac{\partial A_x}{\partial x}(M) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(M) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(M) \quad (2.3)$$

★ La divergence est utilisée en physique pour modéliser **un flux**. On l'utilise à chaque fois que l'on veut exprimer la conservation d'une quantité.

★ On voit que la divergence de $\vec{A}$ peut s'exprimer comme un produit scalaire de l'opérateur nabla avec $\vec{A}$.

Le cours en exemples 6 : Calcul de divergences

Calculer la divergence des vecteurs suivants :

1. $\vec{A} = 3\vec{u}_x - 5\vec{u}_y$.
2. $\vec{A} = (5x + y^2)\vec{u}_x + 36z\vec{u}_y$.
3. $\vec{A} = (4y)\vec{u}_x + 6z^2\vec{u}_z$.
4. $\vec{A} = (3x + 5xy)\vec{u}_x + 2y^3\vec{u}_y + yz\vec{u}_z$.

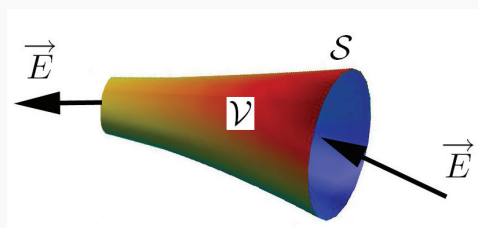
Réponse : 1. $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. 2. $\operatorname{div} \vec{A} = 5$. 3. $\operatorname{div} \vec{A} = 12z$. 4. $\operatorname{div} \vec{A} = 3 + 6y + 6yz$.

Théorème de Green-Ostrogradski

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée orientée par le vecteur $d\vec{S}(M)$ délimitant un volume V . Alors tout vecteur $\vec{E}$ vérifie :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.4)$$

La quantité $\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ représente une intégrale sur un contour fermé. Physiquement, ça représente le flux de $\vec{E}$ quittant le volume V .



2.5 Rotationnel

Définition

Le rotationnel est un opérateur qui s'applique sur un vecteur $\vec{A}$ pour le transformer en un autre vecteur. En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\text{rot } \vec{A}(M) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} (M) \quad (2.5)$$

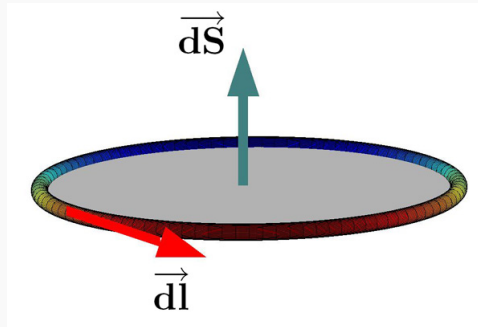
- ★ On utilise le rotationnel pour exprimer comment le vecteur $\vec{A}$ tourne dans l'espace.
- ★ On voit que le rotationnel de $\vec{A}$ peut s'exprimer comme un produit vectoriel de l'opérateur nabla avec $\vec{A}$.

Théorème de Stokes-Ostrogradski

Soit $\mathcal{C}$ un contour fermé orienté par le vecteur $\vec{dl}(M)$ délimitant une surface $\mathcal{S}$ orientée par le vecteur $\vec{dS}(M)$. Alors tout vecteur $\vec{A}$ vérifie :

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (2.6)$$

La quantité $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \vec{dl}$ s'appelle la circulation de $\vec{A}$ le long du contour fermé $\mathcal{C}$. Elle est liée au rotationnel de ce vecteur.



2.6 Laplacien

Définition

Le laplacien scalaire d'une grandeur scalaire f est une grandeur scalaire notée Δf et qui vaut :

$$\Delta f(M) = \text{div} (\vec{\text{grad}} f) (M) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M) \quad (2.7)$$

2.7 Relations utiles

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}(fg) &= (\overrightarrow{\text{grad}} f)g + f(\overrightarrow{\text{grad}} g) \\
\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) &= \text{div} \vec{A} + \text{div} \vec{B} \\
\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} + \vec{B}) &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \\
\text{div}(f\vec{A}) &= (\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot \vec{A} + f \text{div}(\vec{A}) \\
\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) &= (\overrightarrow{\text{grad}} f) \wedge \vec{A} + f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \\
\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \\
\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) &= \vec{0} \\
\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) &= 0
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Révisions

Ce chapitre vise à vous faire réviser les notions que vous avez apprises en L1. Pour plus de détails, je vous renvoie au cours de L1 de Marie-Alix Duval.

3.1 Caractéristiques d'un système thermodynamique

Définition

Un **système thermodynamique** est un ensemble de matière (solide ou fluide, sous la forme d'un ou plusieurs constituant(s)) qui est dit :

- **Ouvert** s'il peut échanger de l'énergie et de la matière
- **Fermé** s'il ne peut échanger que de l'énergie (sous forme de travail et/ou de chaleur)
- **Isolé** s'il ne peut échanger ni énergie ni matière.

On peut utiliser les lois de la mécanique pour décrire un solide indéformable ou le mouvement d'un atome ou d'une molécule. Par contre, lorsque l'on veut décrire un gaz, un liquide, ou un solide déformable, comme il est impossible pratiquement d'étudier le mouvement de chaque atome, on recourt à un traitement statistique de l'ensemble du système. Ceci conduit à définir des variables d'états d'un système.

Définition

Un système thermodynamique est décrit par un ensemble de **variables (ou grandeurs) d'état** qui peuvent être :

- **Extensives** si elles dépendent de la taille du système. Exemples : volume, nombre de moles.
- **Intensives** si elles sont indépendantes de la taille du système. Exemples : pression, température.

L'équation qui relie les différentes variables d'état entre elles s'appelle une **équation d'état**. L'état macroscopique d'un système est donc donné par l'ensemble des valeurs de ses variables d'état.

Principe zéro de la thermodynamique

Deux corps en équilibre thermique avec un troisième sont eux-mêmes en équilibre thermique l'un avec l'autre.

★ Un système est en équilibre si toutes ses variables d'état sont indépendantes du temps. On a

alors un équilibre macroscopique. Ceci ne signifie cependant pas que le système est immobile microscopiquement.

★ La transformation d'un système depuis un état d'équilibre macroscopique vers un autre état d'équilibre se fait par l'évolution des variables d'état.

Définition

Une transformation peut être :

- **Réversible** si elle consiste en une succession d'états d'équilibre pour le système *ET* pour le milieu extérieur. Exemple : un piston que l'on déplace en augmentant très progressivement la force exercée pour comprimer le fluide et qui se déplace sans frottements.
- **Irréversible**. Exemple : un gaz initialement dans un volume V est brutalement détendu dans un volume $2V$.
- **Quasi-statique** si elle consiste en une succession d'états d'équilibre pour le système. Exemple : un piston que l'on déplace en augmentant très progressivement la force exercée pour comprimer le fluide, y compris lorsqu'il y a frottements.
- **Isobare** si elle se fait à pression constante.
- **Isochore** si elle se fait à volume constant.
- **Isotherme** si elle se fait à température constante.
- **Adiabatique** si elle se fait sans que le système n'échange de chaleur avec le milieu extérieur.

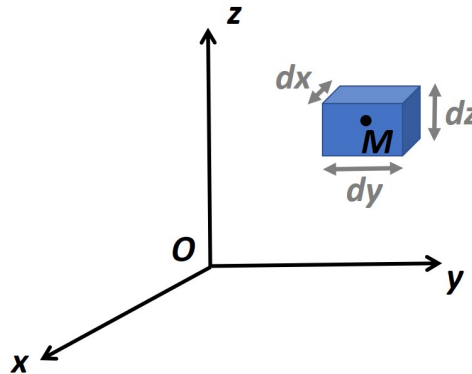
Le cours en exemples 7 : Transformations

1. Comment peut-on modifier la température d'un système sans le chauffer ou le refroidir (c'est-à-dire sans apport de chaleur) ?
2. Donner un exemple de système dont la température ne varie pas, même si on lui apporte de la chaleur.

Réponse : 1. Prenons l'exemple d'un gaz. On peut le détendre et la température va diminuer. Ainsi, on peut avoir une transformation adiabatique non isotherme. 2. Une casserole d'eau bouillante sur le feu est chauffée, mais sa température (à pression ambiante) reste fixe à 100 °C. Ainsi, on peut avoir une transformation isotherme non-adiabatique.

3.2 Pression dans un fluide

3.2.1 Forces de pression



Un élément de fluide de volume élémentaire $dV = dx dy dz$ subit des forces de pression de la part du reste du fluide dans toutes les directions. La force de pression résultante $\vec{F}_{pression}$ s'exerçant sur un élément de fluide s'exprime en fonction de la pression P :

$$\frac{d\vec{F}_{pression}}{dV} = -\vec{\text{grad}}P$$

En d'autres termes :

$$\begin{aligned} dF_x &= -\frac{\partial P}{\partial x} dV \\ dF_y &= -\frac{\partial P}{\partial y} dV \\ dF_z &= -\frac{\partial P}{\partial z} dV \end{aligned}$$

Cette relation est valable pour tout fluide, qu'il soit liquide ou gazeux. La pression est donc une force par unité de surface et s'exprime en N.m^{-2} . On a $1 \text{ Pa} = \text{N.m}^{-2}$.

Le cours en exemples 8 : Pression uniforme dans un fluide

Que vaut la force de pression résultante qui s'exerce sur un volume élémentaire de fluide si la pression P est uniforme, c'est-à-dire si P est constante dans tout le fluide ?

Réponse : Dans ce cas, $-\frac{dP}{dx} = -\frac{dP}{dy} = -\frac{dP}{dz} = 0$, ce qui fait que $\vec{F}_{pression} = \vec{0}$.

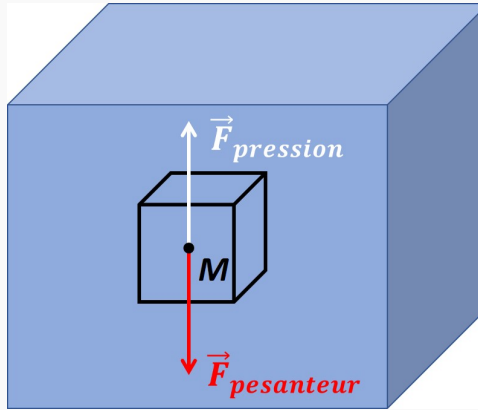
3.2.2 Fluide à l'équilibre

Loi fondamentale de l'hydrostatique

Un fluide de masse volumique ρ en équilibre dans le champ de pesanteur a une pression P telle que :

$$\vec{\text{grad}}P = \rho \vec{g}.$$

Le cours en exemples 9 : Démonstration de la loi fondamentale de l'hydrostatique



On considère un élément de fluide de volume dV au repos dans le champ de pesanteur (c'est-à-dire soumis à son poids).

1. Quelle est la force par unité de volume correspondant à la force de pesanteur ?
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'élément de fluide et établir la loi fondamentale de l'hydrostatique.

Réponse : 1. La force de pesanteur par unité de volume vaut $\frac{d\vec{F}_{\text{pesanteur}}}{dV} = \rho \vec{g}$. 2. Pour l'élément de fluide au repos, on a :

$$\frac{d\vec{F}_{\text{pression}}}{dV} + \frac{d\vec{F}_{\text{pesanteur}}}{dV} = \vec{0}, \text{ soit } \vec{\text{grad}} P = -\rho \vec{g}$$

Loi fondamentale de l'hydrostatique pour un fluide incompressible

Un fluide incompressible, c'est-à-dire de masse volumique ρ constante, en équilibre dans le champ de pesanteur a une pression P telle que :

$$P = P_0 - \rho g z.$$

où P_0 est la pression à $z = 0$, et l'axe des z orienté positivement vers les hautes altitudes.

Le cours en exemples 10 : Démonstration de la loi fondamentale pour un fluide incompressible

On considère un élément de fluide incompressible de volume dV au repos dans le champ de pesanteur (c'est-à-dire soumis à son poids). Établir la loi fondamentale de l'hydrostatique dans ce cas.

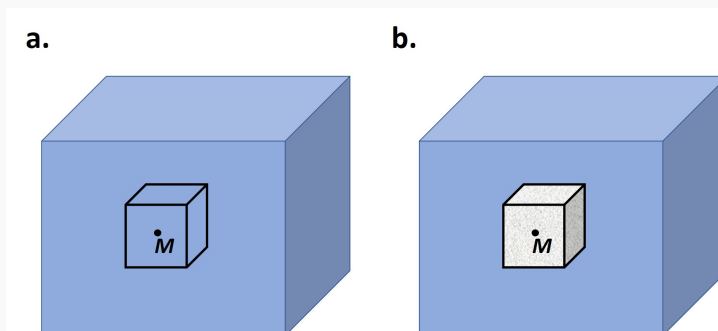
Réponse : On part de la loi fondamentale de l'hydrostatique pour un fluide quelconque : $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$ que l'on projette selon l'axe z des altitudes : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. On intègre cette équation : $\int_z^0 dP = P(0) - P(z) = -\rho g \int_z^0 dz = -\rho g z$.

3.2.3 Poussée d'Archimède

Théorème d'Archimède

Tout corps complètement immergé dans un fluide est soumis de la part du fluide à une force de poussée égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

Le cours en exemples 11 : Démonstration du théorème d'Archimède



1. Dans le cas a. ci-dessus, établir l'équation de repos du volume V de fluide centré au point M en fonction de la pression P et de son poids.
2. En déduire qu'un corps immergé ayant le même volume et situé au même endroit subit la poussée d'Archimède.

Réponse : 1. Le volume V de fluide est au repos et subit son poids et les forces de pression de la part du reste du fluide. Ainsi, s'il a une masse volumique ρ , on a par application du principe fondamental de la dynamique : $-\rho V \vec{g} = \vec{F}_{\text{pression}}$. 2. Le corps immergé au même endroit subit la même force de pression de la part du reste du fluide, ce qui prouve le théorème d'Archimède.

3.3 Cas des gaz

3.3.1 Gaz parfaits

Définition

Un **gaz parfait** est un gaz "idéal" où les molécules sont considérées comme ponctuelles et sans aucune interaction entre elles.

Équation d'état des gaz parfaits

L'équation d'état des gaz parfaits relie la pression P , le volume V , le nombre de moles n et la température T d'un gaz parfait et la constante des gaz parfait $R = 8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$:

$$PV = nRT$$

Application du cours 1 : Équilibre isotherme de l'atmosphère

On supposera que l'air est un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. On supposera également que l'atmosphère est constituée d'air et qu'elle est isotherme, c'est-à-dire que T est supposée constante et uniforme. L'atmosphère est en équilibre dans le champ de pesanteur.

1. Écrire la relation d'équilibre pour l'atmosphère.
2. En projetant sur l'axe z des altitudes, déterminer l'équation vérifiée par $\frac{dP}{dz}$.
3. Ré-écrire la loi des gaz parfaits pour faire apparaître la masse molaire M et la masse volumique de l'air ρ .
4. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la pression P en fonction de M , g , R et T .
5. La résoudre en prenant comme conditions initiales que, en $z = 0$, on a une pression P_0 .

Ainsi, la pression (et la masse volumique) dépend exponentiellement de l'altitude. On remarquera qu'il apparaît une hauteur caractéristique $H = \frac{RT}{MG} \simeq 8 \text{ km}$. C'est l'altitude typique pour la raréfaction de l'atmosphère. En réalité l'atmosphère n'est pas isotherme, mais perd environ 6°C par km d'altitude.

Réponse : 1. La loi fondamentale de l'hydrostatique donne : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. 2. Projetée sur x ou y , on trouve $\frac{dP}{dz} = 0$, c'est-à-dire une pression constante selon x et y . Projetée sur z , on a $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. 3. On a $\rho = \frac{M}{V}$, d'où : $P = \frac{\rho RT}{M}$. Ici, la masse volumique dépend de l'altitude. 4. $\frac{dP}{dz} = -\frac{\rho RT}{M}$. 5. $P = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$.

3.3.2 Gaz réels

Le modèle du gaz parfait est bien vérifié dans la limite des faibles pressions. En pratique, dans des conditions usuelles de température et de pression, il s'agit d'une bonne approximation.

Un autre modèle, plus proche de la réalité, est le modèle de Van der Waals qui modélise les interactions entre les molécules par un potentiel répulsif à courte distance (les molécules ne peuvent pas s'inter-pénétrer) et attractif à plus longues distances (du fait d'effets électrostatiques). Vous l'avez abordé l'année dernière, mais on ne reviendra pas dessus cette année.

3.4 Fonctions d'état

Définition

Une **fonction d'état** est une grandeur qui dépend des variables d'état et dont les variations ne dépendent que de l'état initial et de l'état final du système, et **pas** du chemin suivi pour aller de l'état initial à l'état final.

En particulier, on définit :

- **L'énergie interne** U qui est la somme des énergies cinétiques des particules et des énergies potentielles correspondant aux forces d'interaction microscopiques. Elle s'exprime en Joule.
 - ★ U est une grandeur extensive.
 - ★ U se conserve pour un système **isolé**.
 - ★ Pour un **gaz parfait**, U ne dépend que de la température (et pas du volume). C'est la **1^{re} loi de Joule**.
 - ★ Pour un **gaz parfait monoatomique** avec N particules correspondant à n moles, on a :

$$U = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}nRT.$$

- **L'enthalpie** H (en Joules) qui est définie par :

$$H = U + PV.$$

- ★ H est une grandeur extensive
 - ★ Pour un **gaz parfait**, H ne dépend que de la température (et pas du volume). C'est la **2^{me} loi de Joule**.
- **L'entropie** S (en J.K^{-1}) qui quantifie le désordre du système. À l'équilibre, on a :

$$S = k_B \ln \Omega,$$

où $k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann et Ω est le nombre de configurations microscopiques pouvant être occupées par le système. Cette notion est un peu abstraite pour l'instant, vous en verrez l'explication lorsque vous ferez de la physique statistique.

Identités thermodynamiques fondamentales

On a les **identités thermodynamiques fondamentales** valables pour **tout système fermé de composition constante** :

$$dU = TdS - PdV$$

$$dH = TdS + VdP$$

qui définissent la température T et la pression P thermodynamiquement.

★ À partir de ces identités, on peut jouer avec les dérivées partielles et établir :

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P \\ -P &= \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S \\ V &= \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_S \end{aligned}$$

Le cours en exemples 12 : Identité thermodynamique sur H

À partir de l'identité thermodynamique sur U , établir celle sur H .

$$\text{Réponse : } dU = TdS - PdV = TdS - PdV + PdV + VdP = dH \text{ Donc } dH = TdS + VdP.$$

3.5 Transferts d'énergie

Un système thermodynamique peut échanger de l'énergie avec le monde extérieur de deux manières différentes :

- Soit via le **travail des forces extérieures** qui lui sont appliquées,
- Soit par échange de **chaleur**.

Ce qui est reçu par le système est, par convention, compté positivement, ce qui est cédé par le système est compté négativement.

3.5.1 Travail des forces extérieures

Définition

Le travail élémentaire, c'est-à-dire au cours d'un "petit" changement, d'une force extérieure $\vec{F}_{ext}$ vaut :

$$\delta W = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl}$$

où $\vec{dl}$ est le déplacement dans l'espace du point d'application de la force.

Le travail total entre l'état a et l'état b s'écrit alors :

$$W = \int_a^b \delta W.$$

★ Dans le cas d'une **force de pression**, on a :

$$\delta W_{\text{pression}} = -P_{\text{ext}} dV$$

★ Dans le cas d'une **force de pression**, et pour une évolution **quasi-statique et réversible** où le système est à l'équilibre à tout instant, on a $P = P_{\text{ext}}$, et donc :

$$\delta W_{\text{pression}} = -PdV$$

3.5.2 Chaleur

Définition

La quantité de chaleur totale échangée entre l'état a et l'état b s'écrit :

$$Q = \int_a^b \delta Q.$$

où δQ est la chaleur élémentaire échangée lors d'une transformation infinitésimale.

Dans le cas d'un corps dont la température change sous l'effet d'une transformation :

- À **pression constante**, la chaleur échangée lors d'une variation dT de température est proportionnelle à la capacité thermique massique à pression constante. Pour une masse m de composé, on a :

$$\delta Q = mc_p dT$$

- À **volume constant**, la chaleur échangée lors d'une variation dT de température est proportionnelle à la capacité thermique massique à volume constant. Pour une masse m de composé, on a :

$$\delta Q = mc_v dT$$

- Les capacités thermiques massiques s'expriment en $\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$. On peut également avoir des capacités thermiques molaires en $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ (auquel cas on a $\delta Q = nc_p dT$ ou $\delta Q = nc_v dT$ avec n le nombre de moles du composé), ou des capacités thermiques volumiques en $\text{J.K}^{-1}.\text{m}^{-3}$ (auquel cas on a $\delta Q = Vc_p dT$ ou $\delta Q = Vc_v dT$ avec V le volume occupé par le composé).
- Pour un **gaz parfait**, on a $c_p - c_v = nR$, où n est le nombre de moles du gaz et R la constante des gaz parfaits. C'est la **relation de Meyer**.
- Si le système comporte plusieurs composés, la chaleur échangée pour la totalité du système est la somme des chaleurs pour chacun des composés.
- On peut également montrer que les chaleurs spécifiques (ou capacités thermiques molaires) s'écrivent (voir **Chapitre 1, Le cours en exemple 3**) :

$$\begin{aligned} c_v &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \\ c_p &= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \end{aligned}$$

- On appelle coefficient adiabatique, exposant adiabatique ou **coefficient de Laplace** le rapport entre c_p et c_v :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Le cours en exemples 13 : Cas du gaz parfait monoatomique

1. À partir de $U = \frac{3}{2}nRT$, valable pour le gaz parfait monoatomique, déterminer l'expression de c_v .
2. Déterminer l'expression de c_p .
3. Retrouver la relation de Meyer : $c_p - c_v = nR$.
4. Déterminer la valeur du coefficient de Laplace γ .

Réponse : 1. $c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}nR$. 2. $H = \frac{5}{2}nRT + PV = \frac{5}{2}nRT$, d'où $c_v = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \frac{5}{2}nR$. 3. D'où la relation de Meyer : $c_p - c_v = nR$. 4. On a aussi $\gamma = \frac{5}{3}$.

Le cours en exemples 14 : Formules de Laplace pour un gaz parfait

On vient de montrer que le coefficient de Laplace vaut $\gamma = \frac{5}{3}$ pour un gaz parfait monoatomique. On peut montrer que $\gamma = \frac{7}{5}$ pour un gaz parfait diatomique. En tout état de cause, pour tout gaz parfait, on a γ qui est une constante.

On considère une évolution isentropique d'un gaz parfait.

1. Exprimer dU en fonction de P et V , puis en fonction de c_v et T .
2. En déduire une relation entre $\frac{dT}{T}$ et $\frac{dV}{V}$.
3. En utilisant la relation de Meyer valable pour tous les gaz parfaits, exprimer cette relation en fonction de γ .
4. En déduire que $TV^{\gamma-1} = cste$.
5. En déduire que $PV^\gamma = cste$.
6. En déduire que $T^\gamma P^{1-\gamma} = cste$.

Réponse : 1. $dU = -PdV$. Par ailleurs $dU = c_v dT$ d'après l'exercice précédent. 2. $-nR \frac{dV}{V} = c_v \frac{dT}{T}$. 3. $-\frac{dT}{T} = \frac{c_v}{c_p - c_v} \frac{dV}{V}$. 4. En intégrant, on trouve $TV^{\gamma-1} = cste$. 5. En utilisant la relation des gaz parfaits, on trouve $PV^\gamma = cste$. 6. En utilisant la relation des gaz parfaits, on trouve $T^\gamma P^{1-\gamma} = cste$.

Le cours en exemples 15 : Refroidissement d'une pizza

On considère une pizza constituée de 300 g de pâte ($C_{v,pate} = 1.7 \text{ J.K}^{-1}.\text{g}^{-1}$), 50 g de sauce tomate ($C_{v,sauce} = 4 \text{ J.K}^{-1}.\text{g}^{-1}$), et 40 g de mozzarella ($C_{v,mozza} = 3.7 \text{ J.K}^{-1}.\text{g}^{-1}$).

1. Calculer la capacité thermique totale de la pizza.
2. Quelle énergie a-t-il fallu dépenser pour amener la pizza d'une température de 20°C à une température de 250°C pendant la cuisson ?
3. Une fois cuite, la pizza est sortie et vous commencez à la manger lorsqu'elle est à la température de 140°C . Quelle quantité de chaleur est transférée de 15 g de mozzarella (une cuillerée) à votre palais lorsque vous mangez la pizza ?
4. Même question pour la même masse de sauce tomate et la même masse de pâte.
5. Qu'est-ce qui brûle le plus ?

Réponse : 1. $C = 300 * 1.7 + 50 * 4 + 40 * 3.7 = 858 \text{ J.K}^{-1}$. 2. $\Delta U = C \Delta T = 197.3 \text{ kJ}$. 3. $Q_{mozza} = 15 * 3.7 * (140 - 37) = 5.7 \text{ kJ}$. 4. Pour la sauce tomate : $Q_{sauce} = 15 * 4 * (140 - 37) = 6.2 \text{ kJ}$. Pour la pâte : $Q_{pate} = 15 * 1.7 * (140 - 37) = 2.6 \text{ kJ}$. 5. On se brûle plus facilement avec la sauce tomate ou la mozzarella, beaucoup moins avec la pâte.

3.5.3 Changement d'état

Il y a 3 états de la matière : **solide**, **liquide** et **gaz**. La transformation d'un état à l'autre s'appelle **changement d'état**. Il se fait toujours à température constante et implique une consommation ou un dégagement d'énergie. Lorsque l'on va du solide au liquide ou du liquide au gaz, le changement consomme de l'énergie. Dans le sens contraire, il libère de l'énergie. On a pour une masse élémentaire dm de composé :

$$\delta Q = L dm,$$

où L est la chaleur latente massique de transformation. Ça peut être une fusion (solide devient liquide), une évaporation (liquide devient gaz) ou une sublimation (solide devient gaz).

- On peut avoir la chaleur latente molaire L_M , auquel cas $\delta Q = L_M dn$ pour dn moles de composé.
- La chaleur latente est positive lorsque l'on passe d'un état ordonné à un état désordonné, et négative lorsque l'on passe d'un état désordonné à un état ordonné. Par exemple, on a :

$$L_{\text{liquide} \rightarrow \text{vapeur}} = -L_{\text{vapeur} \rightarrow \text{liquide}} > 0.$$

- Si le système comporte plusieurs composés, la chaleur de changement d'état est la somme des chaleurs pour chacun des composés.

Le cours en exemples 16 : Refroidissement de l'air par évapotranspiration

Un grand arbre peut produire 450 L d'eau par jour. La chaleur latente de vaporisation de l'eau vaut $L_{v,eau} = 2'265 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

1. Estimer la quantité d'énergie que peut pomper l'arbre de l'air ambiant.
2. À quelle puissance cela correspond-il ? La comparer à un module d'air conditionné ($\sim 2.5 \text{ kW}$).

Réponse : 1. Il peut pomper environ $1,02 \cdot 10^6 \text{ kJ}$ par jour. 2. Cette énergie est produite par respiration de l'arbre. Ainsi, cela correspond à une puissance $P = 1,02 \cdot 10^6 / (24 \cdot 3600) = 11,8 \text{ kW}$, soit près de 5 modules d'air conditionné.

Le cours en exemples 17 : En sortant de la douche

Lorsque l'on est mouillé, l'eau à la surface de la peau s'évapore. La chaleur latente de vaporisation de l'eau vaut $L_{v,eau} = 2'265 \text{ kJ.kg}^{-1}$, sa masse volumique de $\rho_{eau} = 1'000 \text{ kg.m}^{-3}$. La surface de la peau est d'environ 1.7 m^2 . Estimer un ordre de grandeur de l'énergie que vous perdez lorsque vous sortez de la douche, via l'évaporation de l'eau sur la peau.

Réponse : On peut estimer qu'il se forme un film d'eau de 1 mm d'épaisseur à la surface de la peau, soit un volume de $1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, soit $1,7 \text{ kg}$. Si l'eau s'évapore intégralement, cela correspond à une quantité d'énergie de $3'850 \text{ kJ}$ qui est prélevée de l'air ambiant, mais aussi de la chaleur de votre peau.

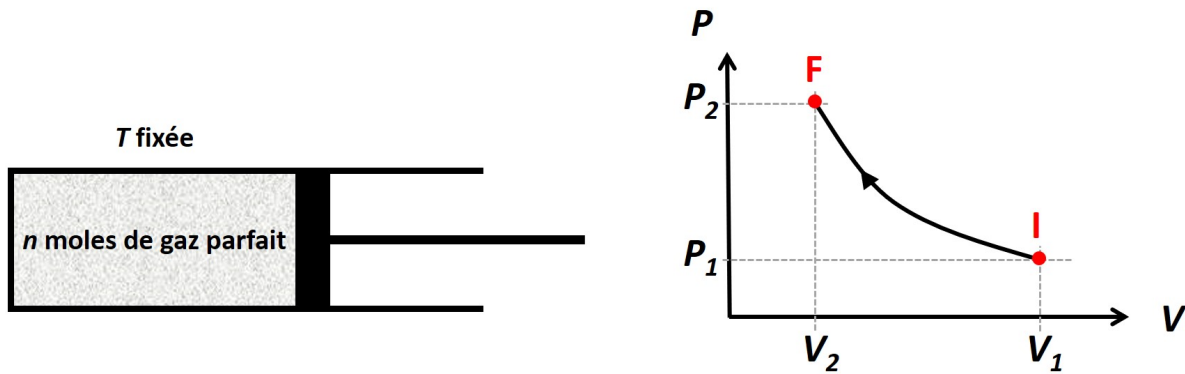
3.5.4 Premier principe de la thermodynamique**Premier principe de la thermodynamique**

Pour tout système thermodynamique, on peut écrire la conservation de l'énergie au cours une transformation élémentaire sous la forme :

$$\delta E + \delta U = \delta W + \delta Q,$$

où δE est la variation d'énergie mécanique qui prend en compte les énergies cinétiques macroscopiques **et** les énergies potentielles d'interactions macroscopiques (gravitationnelle, électrostatique, ...). δW correspond au travail des forces non conservatives.

Application du cours 2 : Compression isotherme réversible



On considère n moles de gaz parfait dans un piston qui subit une compression isotherme réversible entre un état initial I et un état final F , comme schématisé ci-dessus.

1. Déterminer le travail des forces de pression. Est-il positif ou négatif ? Est-ce logique ?
2. Que représente le travail des forces de pression, géométriquement, sur le diagramme $P(V)$ ci-dessus ?
3. Que vaut la variation d'énergie interne du gaz parfait ?
4. En déduire la chaleur échangée avec le milieu extérieur par le système.

Réponse : 1. $W = \int_F^I -P dV = - \int_F^I nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$. C'est normal : il faut fournir de l'énergie pour comprimer un gaz. 2. Le travail des forces de pression représenté l'aire sous la courbe $P(V)$, orientée dans le sens de parcours de la transformation. 3. L'énergie interne U d'un gaz parfait ne dépend que de la température. D'où $\delta U = 0$. 4. Le premier principe donne : $\dot{Q} = -W < 0$: le système cède de la chaleur au thermostat.

3.5.5 Second principe de la thermodynamique

Second principe de la thermodynamique

Pour un système fermé, la variation élémentaire d'entropie s'écrit :

$$\delta S = \delta S_e + \delta S_c,$$

où $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T}$ est la variation élémentaire d'entropie due aux échanges avec l'extérieur et δS_c est la variation élémentaire d'entropie créée au cours de la transformation considérée.

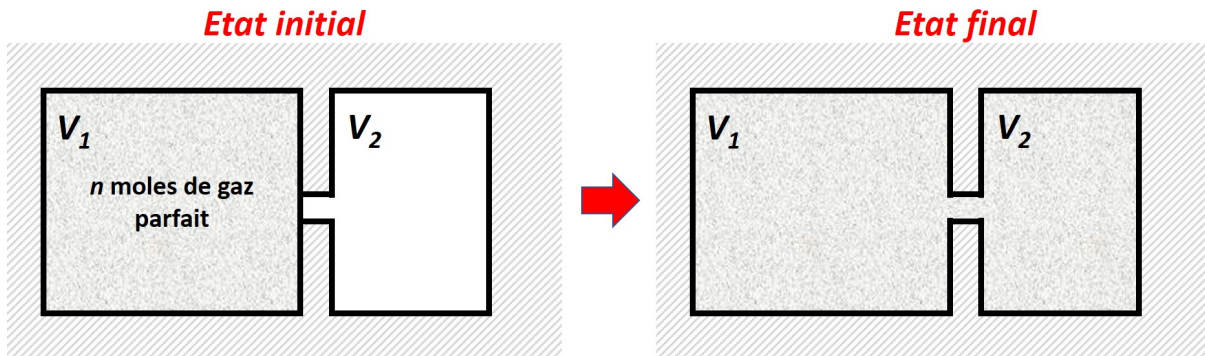
★ On a toujours $\delta S_c \geq 0$.

★ Pour une transformation réversible, on a $\delta S_c = 0$ et donc $\delta S = \frac{\delta Q}{T}$.

★ Il s'ensuit que l'on a toujours :

$$\delta S \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Application du cours 3 : Détente de Joule-Gay-Lussac



On considère n moles de gaz parfait dans une enceinte calorifugée à parois rigides. Initialement, le gaz se trouve dans le récipient de volume V_1 . La détente a lieu lorsque l'on met le récipient de volume V_1 en communication avec un autre récipient de volume V_2 .

1. Déterminer le travail des forces extérieures.
2. Déterminer la chaleur échangée avec le milieu extérieur par le système.
3. En déduire que pour une détente de Joule-Gay-Lussac, l'énergie interne ne varie pas.
4. En déduire qu'une détente de Joule-Gay-Lussac se fait à température constante pour un gaz parfait.
5. Calculer la variation d'entropie pour ce système.

Réponse : 1. Il n'y a aucune force extérieure appliquée : $W = 0$. 2. Les enceintes sont calorifugées : $Q = 0$. 3. Le premier principe donne $\Delta U = 0$. 4. Pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température. Si U est constante, la température est constante. 5. $dU = TdS - PdV = 0$, d'où $dS = \frac{P}{T}dV = \frac{1}{V}dV$. Donc : $\Delta S = \int_{V_1}^{V_1+V_2} \frac{1}{V}dV = nR \ln \frac{V_1+V_2}{V_1} > 0$.

3.6 Lien avec la chimie

Cette section est pour votre culture générale. Vous ne serez pas interrogés dessus.

3.6.1 Enthalpie libre d'une réaction

Définition

On définit l'**enthalpie libre**, une fonction d'état, par :

$$G = H - TS = U + PV - TS$$

Considérons une réaction chimique à **pression et température constantes**, ce qui est généralement le cas. Comme la pression est constante, on a :

$$\begin{aligned} dH &= dU + PdV + VdP \\ &= \delta Q + \delta W + PdV \end{aligned}$$

en utilisant le premier principe. À pression constante et en supposant que le seul travail est celui des forces de pressions :

$$dH = \delta Q. \quad (3.1)$$

Par ailleurs, on a, à température constante :

$$\begin{aligned} dG &= dH - TdS - SdT \\ &= dH - TdS \\ &= \delta Q - T(dS_e + dS_c) \\ &= \delta Q - T\left(\frac{\delta Q}{T} + dS_c\right) \\ dG &= -TdS_c \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, **une réaction chimique aura spontanément lieu dans le sens des enthalpies libres décroissantes**.

3.6.2 Avancement et affinité chimique

Lorsque l'on a plusieurs corps purs en présence, l'identité thermodynamique pour l'énergie interne devient :

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i,$$

où μ_i est appelé potentiel chimique et N_i correspond au nombre de moles du corps pur i .

Par ailleurs, pour une réaction quasi-statique, à une pression P_0 et une température T_0 , en appliquant le premier principe, l'expression du travail des forces de pression et le second principe, on a :

$$\begin{aligned} dU &= \delta W + \delta Q \\ &= -P_0 dV + T_0 dS - T_0 \delta S_c \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions, on obtient :

$$T_0 \delta S_c = (P - P_0) dV - (T - T_0) - \sum_i \mu_i dN_i.$$

Comme on est souvent, en chimie, à pression et température constante :

$$T_0 \delta S_c = - \sum_i \mu_i dN_i.$$

Pour une réaction, on note ν_i les coefficients stoechiométriques algébrisés et ξ l'avancement de la réaction chimique, définie comme :

$$\nu_i = \frac{dN_i}{d\xi}. \quad (3.2)$$

Alors, on peut définir l'affinité chimique $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = T \frac{dS_c}{d\xi} = - \sum_i \nu_i \mu_i.$$

Le deuxième principe de la thermodynamique impose le sens de réaction tel que :

$$\mathcal{A} d\xi \geq 0$$

3.7 Machines thermiques

3.7.1 Machines thermiques idéales

Théorème de Kelvin

Il n'existe pas de moteur cyclique monotherme.

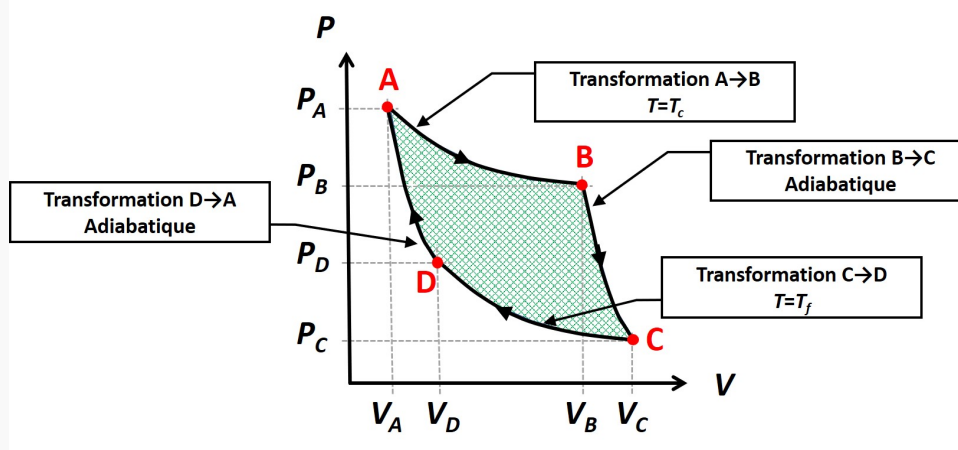
Théorème de Clausius

Aucun système décrivant une évolution cyclique ne peut réaliser un transfert thermique parfait entre une source froide et une source chaude.

Théorème de Carnot

Pour une machine ditherme cyclique, le rendement est inférieur ou égal au rendement de Carnot. L'égalité est atteinte uniquement lorsque le fonctionnement de la machine est réversible.

Le cours en exemples 18 : Égalité de Clausius-Carnot



On considère un système de n moles de gaz parfait qui a des transferts thermiques **réversibles** avec deux sources de chaleur suivant le diagramme ci-dessus. C'est ce que l'on appelle un **cycle de Carnot**. Entre A et B , le système est en contact avec une source chaude à une température T_c . Entre C et D , il est en contact avec une source froide à une température T_f . Les transformations de B à C puis de D à A sont adiabatiques. Le rendement pour une telle machine est définie par $r = \frac{-W}{Q_c}$, où $-W$ est le travail fourni par le système et Q_c la chaleur échangée par la source chaude. On note Q_f la chaleur échangée par la source froide.

1. Décrire les différentes transformations.
2. Que vaut la variation d'énergie interne au cours d'un cycle complet ?
3. En utilisant l'application du cours sur la compression isotherme réversible, calculer la chaleur échangée par le système au cours d'un cycle.
4. En utilisant l'une des relations de Laplace pour des transformations isentropiques, montrer que $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$.
5. En déduire l'égalité de Clausius : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$.
6. Que vaut le travail produit par la machine ? Est-il positif ou négatif ?
7. Que représente l'aire hachurée du cycle ?
8. Exprimer le rendement en fonction de Q_c et Q_f .

Réponse : 1. De A à B on a une détente isotherme réversible. De B à C une détente adiabatique réversible. De C à D une compression isotherme réversible. De D à A une compression adiabatique réversible. Les transformations adiabatiques réversibles sont isentropiques. 2. On revient au point de départ, donc $\Delta U = 0$. 3. $Q = Q_c + 0 + 0 + Q_f = 0$. 4. On a $T V^{\gamma-1} = \text{cte}$ pour les transformations $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$, d'où $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$ et $T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$. 5. $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = n R \ln \frac{V_A}{V_B} - n R \ln \frac{V_C}{V_D} = 0$. 6. $\Delta U = 0 = W + Q$, d'où $W = -Q$. 7. L'aire hachurée du cycle représente le travail fourni. Il est bien positif vu l'orientation du cycle. 8. $r = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$.

Le cours en exemples 19 : Application du cycle de Carnot

On assimile un congélateur à une machine thermique dans lequel le fluide calorifique effectue des cycles de Carnot (voir exercice de cours précédent) entre le milieu extérieur de température constante $T_c = 20^\circ\text{C}$ et l'intérieur du congélateur, considéré comme étant une source froide de température $T_f = -18^\circ\text{C}$. Au cours d'un cycle, le fluide frigorigère n'effectue des transferts thermiques qu'avec le milieu extérieur et l'intérieur du congélateur. La puissance du congélateur est de $P = 500 \text{ W}$.

1. Exprimer le rapport de Q_f , la chaleur "retirée" à la source froide, et de Q_c , la chaleur "cédée" à la source chaude.
2. Exprimer Q_f en fonction de W , T_f et T_c .
3. On place dans le congélateur 1 L d'eau à la température initiale $T_0 = 20^\circ\text{C}$. En combien de temps obtient-on de la glace à 0°C ? On donne $C_{p,\text{eau}} = 4.18 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $L_{f,\text{eau}} = 334 \text{ J.g}^{-1}$.

Réponse : 1. $\frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f}$ 2. $Q_f = -\frac{P}{T_c/T_f - 1}$ 3. $Q_f = \frac{P}{T_c/T_f - 1} = \frac{500}{20/(-18) - 1} = 417600 \text{ J}$. Soit $\Delta t = 124.5 \text{ s}$. Il faut donc 2 minutes pour obtenir de la glace.

3.7.2 Machines thermiques réelles

On a vu dans la section précédente que le rendement de Carnot d'un moteur, obtenu lorsque le fonctionnement de la machine est réversible, est de

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

Les machines thermiques réelles, du fait des frottements, de la dissipation et plus généralement des déperditions d'énergie inévitables, ont un fonctionnement pas totalement réversible, ce qui fait que l'efficacité des machines réelles est inférieure à celle d'un moteur Carnot fonctionnant entre les mêmes deux réservoirs de température.

L'efficacité (ou rendement) d'une machine thermique est définie par :

$$\eta_{\text{réel}} = \frac{\text{Quantité d'intérêt}}{\text{Énergie injectée}} < 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

L'efficacité de Carnot est donc une limite supérieure à l'efficacité d'une machine thermique. Elle est souvent utilisée pour établir un ordre de grandeur de ce que l'on peut obtenir à partir d'une source froide ou d'une source chaude donnée.

Le cours en exemples 20 : Application du cycle de Carnot

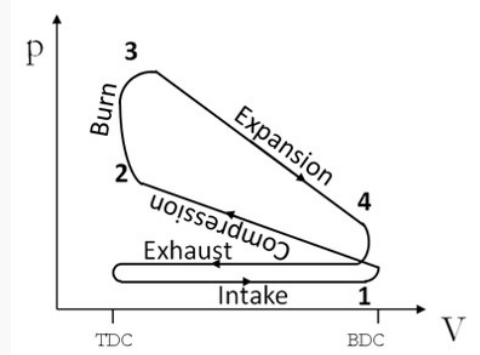


FIGURE 3.1 – Cycle d'Otto. © physicsbootcamp.org.

Le moteur à combustion interne des voitures thermiques, basé sur le cycle d'Otto, est sans doute le moteur le plus utilisé au monde. Le cycle idéal d'Otto est illustré ci-dessus. Le cycle d'Otto se compose des étapes suivantes pour un système constitué d'un mélange d'air et de carburant :

- **Phase d'admission** : La soupape d'admission est ouverte et le piston se rétracte d'une position haute appelée TDC (top dead center) vers une position basse appelée BDC (bottom dead center), aspirant de l'air et de la vapeur d'essence à une pression constante de 1 atmosphère.
- **Compression adiabatique** : La soupape d'admission est fermée et le piston est poussé rapidement, de sorte que le processus est une compression adiabatique. Les températures T_1 et T_2 augmentent à cette étape.
- **Combustion et propulsion** : Dans les moteurs à essence, une bougie d'allumage enflamme le mélange de vapeur d'essence et d'air sous pression. La propulsion est suffisamment rapide pour être adiabatique : il n'y a pas de temps pour que le système échange de la chaleur avec l'extérieur.
- **Échappement** : La soupape d'échappement est ouverte et les produits de combustion à haute pression sont expulsés.

Nous allons déterminer le rendement du cycle d'Otto défini comme le rapport $\eta = \frac{W}{Q_{in}}$, où W est le travail moteur produit et Q_{in} , la chaleur produite par la combustion.

1. Exprimer W en fonction de Q_{in} et Q_{out} , la chaleur expulsée par les produits de combustion.
2. Q_{in} correspond à la chaleur produite par la phase de combustion, qui élève la température du mélange {air+carburant} de T_2 à T_3 . Si C_v est la capacité calorifique du mélange, supposée indépendante de la température, exprimer Q_{in} en fonction de C_v , T_2 et T_3 .
3. Q_{out} a lieu lorsque les gaz s'échappent, abaissant ainsi la température {air+carburant} de T_4 à T_1 . Exprimer Q_{out} en fonction de C_v , T_1 et T_4 .
4. Exprimer η en fonction des températures du cycle.
5. Si on suppose que le mélange {air+carburant} se comporte comme un gaz parfait, simplifier l'expression obtenue pour η en utilisant les formules de Laplace (valables pour des transformations adiabatiques). On notera par ailleurs que $V_1 \simeq V_4$ et $V_2 \simeq V_3$.

Réponse : 1. $W = Q_{in} + Q_{out}$. 2. $Q_{in} = C_v(T_3 - T_2)$. 3. $Q_{out} = C_v(T_4 - T_1)$. 4. $\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$. 5. C'est similaire à l'expression du rendement de Carnot, sauf qu'il n'y a pas de source froide ni de source chaude.

Savoir faire

- ✓ Les définitions !
- ✓ Appliquer la loi fondamentale de l'hydrostatique pour un fluide incompressible **ou** compressible.
- ✓ Manipuler les identités thermodynamiques fondamentales pour extraire les dérivées partielles pertinentes.
- ✓ Déterminer les grandeurs thermodynamiques et leurs variations au cours d'un cycle.

Chapitre 4

Généralités sur les transferts thermiques

Les transferts thermiques peuvent être dus à trois phénomènes physiques différents :

- la **convection**
- le **rayonnement**
- la **conduction thermique**.

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons principalement sur la conduction thermique, mais passons néanmoins brièvement en revue les caractéristiques de ces transferts.

4.1 Convection

Définition

La **convection** est le mode de transfert thermique qui implique des mouvements **macroscopiques** de la matière. La convection est donc **médiée par un fluide** (gaz ou liquide).

- ★ La convection peut avoir lieu au sein d'un fluide ou entre un fluide et un solide.
- ★ Il ne peut donc pas y avoir de convection dans le vide.
- ★ On appelle **convection naturelle** la convection qui est due à un gradient. Cela peut être un gradient de température, de pression ou de concentration par exemple.
- ★ On appelle **convection forcée** une convection qui est due à une autre source (artificielle) : un ventilateur, une turbine, etc...

Le cours en exemples 21 : Exemples de convection

1. Donner un exemple de convection au sein d'un fluide.
2. Donner un exemple de convection entre un fluide et un solide.
3. Donner un exemple de convection naturelle.
4. Donner un exemple de convection forcée.

Réponse : 1. Une casserole d'eau sur un feu : il y a convection au sein de l'eau entre le bas de la casserole, chaud, et la surface libre de l'eau, moins chaude. 2. Il y a convection dans une pièce entre un radiateur et l'air. 3. Les deux cas ci-dessus sont des convections naturelles. 4. Un ventilateur ou une centrale de traitement d'air induit une convection forcée.

Illustration 1 : Ventilation

Dans la plupart des bâtiments modernes, la ventilation est assurée par une centrale de traitement d'air (CTA), de manière à forcer la convection afin que l'air chaud (ou froid) ne stagne pas en haut (ou en bas) du fait de la différence de densité : l'air chaud est moins dense que l'air froid. Une coupe typique montrant un système de ventilation est donnée figure 4.1.

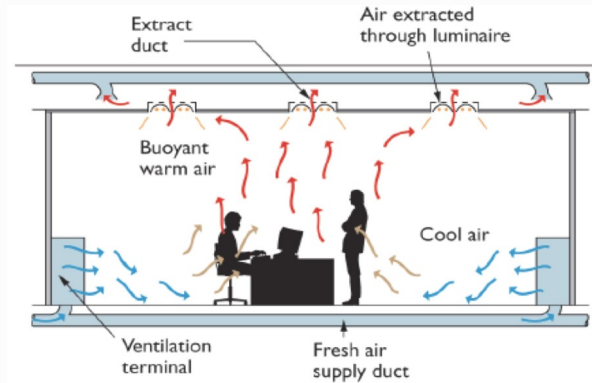


FIGURE 4.1 – Système de ventilation typique dans un immeuble via une centrale de traitement d'air (CTA). © Nuclear-power.

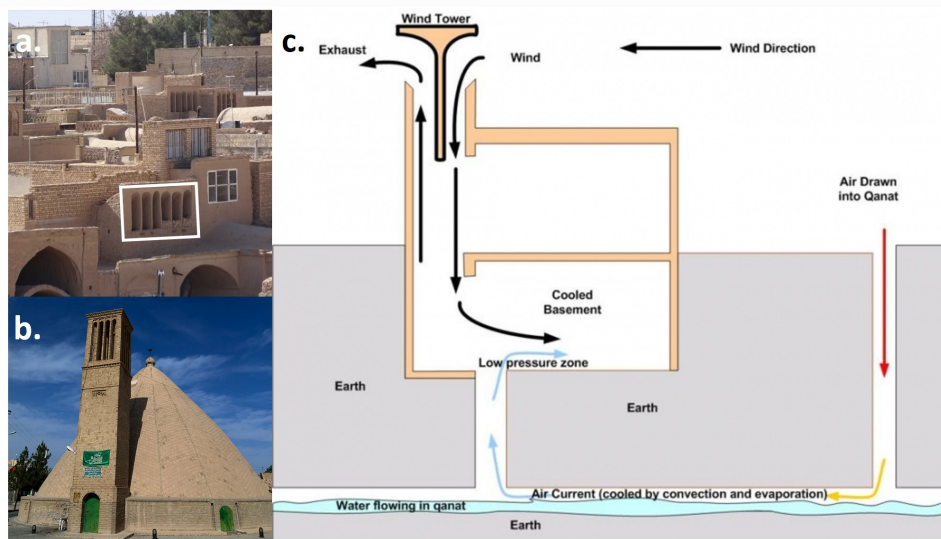
Illustration 2 : Badguir

FIGURE 4.2 – **a.** Badguir en Iran. © Erika Alatalo. **b.** Tour à vent pour un réservoir d'eau à Isfahan (Iran). © Eric Lafforgue. **c.** Schéma de principe d'un badguir. © Solaripedia.

Les badguir ou tours à vent (figure 4.2.a et b) sont des éléments architecturaux que l'on trouve principalement en Iran et qui permettent d'avoir une convection naturelle dans les maisons. Il s'agit d'une ouverture située en hauteur, face au vent dominant. Lorsque le vent souffle, la différence de pression force l'air à l'intérieur de la maison vers le haut pour qu'il soit évacué. Une variante consiste à faire entrer dans la maison de l'air qui aura été préalablement refroidi par un cours d'eau souterrain et qui chasse l'air chaud de la maison (figure 4.2.c).

4.2 Rayonnement

Définition

Le **rayonnement** est un mode de transfert thermique médié par des ondes électromagnétiques, d'une surface vers une autre surface. En effet, chaque objet émet un rayonnement caractéristique de la température T .

Pour un corps noir, un corps idéal qui est à la fois un parfait absorbeur et un émetteur parfait d'ondes électromagnétiques, la loi spectrale de rayonnement (c'est-à-dire en fonction de la longueur d'onde) est donnée par la **loi de Planck** :

$$E(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}, \quad (4.1)$$

où λ est la longueur d'onde considérée et k_B est la constante de Boltzmann (figure 4.3).

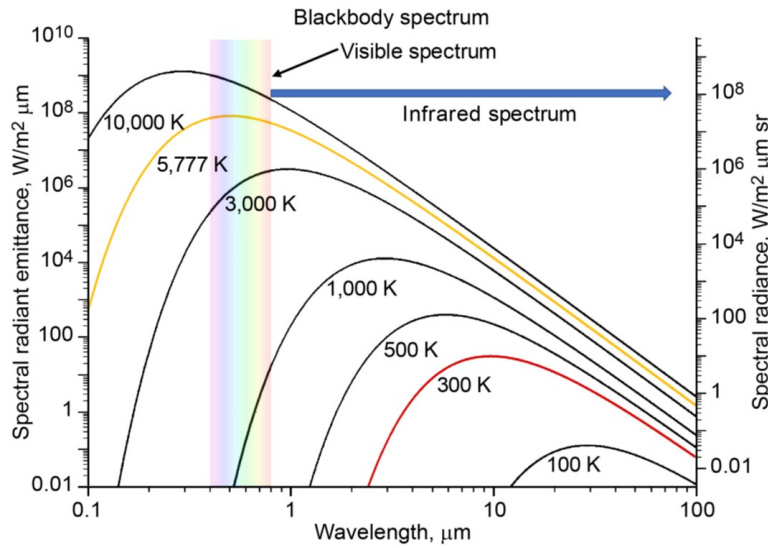


FIGURE 4.3 – Emission spectrale d'un corps noir en fonction de sa température. © Sun.org.

La longueur d'onde λ_{max} qui correspond au maximum d'émission est reliée à la température du corps noir via la **loi du déplacement de Wien** :

$$\lambda_{max} T = 1.898 \times 10^{-3} \text{ m.K.} \quad (4.2)$$

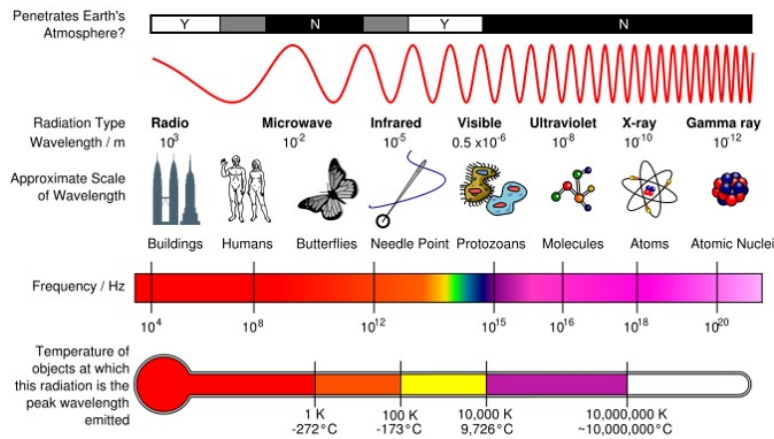


FIGURE 4.4 – Spectre électromagnétique. © Sun.org.

La puissance totale par unité de surface (de l'émetteur) émise par un corps noir à la température T obéit à la **loi de Stefan-Boltzmann** :

$$P = \sigma T^4, \quad (4.3)$$

où la constante de Stefan-Boltzmann vaut $\sigma \approx 5.67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$.

- ★ Le rayonnement est le seul transfert thermique possible dans le vide.
- ★ Le rayonnement ne nécessite aucun support matériel. Il agit à distance.

Le cours en exemples 22 : Rayonnement

1. Le Soleil a une température de 5778 K. À quelle longueur d'onde émet le Soleil ?
2. À quelle longueur d'onde émet le corps humain ?
3. Quel domaine de rayonnement va être important pour le rayonnement dans les villes ?

Réponse : 1. Le Soleil émet principalement dans le visible. 2. Le corps humain émet principalement dans l'infrarouge. 3. L'infrarouge.

4.3 Conduction thermique

Définition

La **conduction thermique** est un transfert thermique qui a lieu dans un solide ou un fluide stationnaire (sans mouvement de fluide).

- ★ C'est un phénomène microscopique sans mouvement macroscopique de matière.
- ★ Il n'y a pas de conduction thermique dans le vide.
- ★ La conduction thermique est médiée par :
 - La conduction électronique : les électrons sont des porteurs de charge, mais peuvent également transporter de la chaleur. Dans beaucoup de matériaux, la conductivité thermique est directement reliée à la conductivité électrique.
 - Les phonons, c'est-à-dire les vibrations thermiques des solides.
 - Les collisions entre molécules (agitation thermique) au sein d'un fluide.

C'est ce phénomène que l'on va plus précisément étudier dans ce cours.

Chapitre 5

Conduction thermique

Dans ce chapitre, nous allons détailler les processus de conduction thermique plus en détail.

5.1 Vecteur densité de flux de chaleur

Définition

Le **vecteur densité de flux de chaleur**, $\vec{j}_Q$, à travers un élément de surface $\vec{dS}$ est tel que la chaleur traversant cette surface entre les instants t et $t + dt$ vaut :

$$\delta Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} dt. \quad (5.1)$$

$\vec{j}_Q$ s'exprime en $\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$, c'est-à-dire en W.m^{-2} . $\vec{dS}$ est parallèle à la normale sortante de la surface considérée.

★ Dans la suite, on fera l'hypothèse de l'**équilibre thermodynamique local**, c'est-à-dire que l'on suppose que l'on peut définir en tout point M et à tout instant t une température $T(M, t)$ et une énergie interne $u(M, t)$.

On peut établir une équation-bilan de la chaleur **en l'absence de sources**. Pour cela, on considère un fluide (ou un solide) de masse volumique μ dans un volume **fixe** V limité par la surface fermée Σ . On fait les hypothèses suivantes :

- Il n'y a pas de convection, de telle sorte à ce que l'énergie cinétique macroscopique du fluide est nulle.
- Il n'y a pas d'autres forces conservatives que les forces de pression.
- Le travail des forces de pression est nul ici car le volume V est constant.

On applique le premier principe au fluide contenu dans le volume V entre t et $t + dt$:

On peut également exprimer dU en fonction de la capacité thermique massique à volume constant c_v :

On finit par obtenir l'équation de conservation de la chaleur en l'absence de sources de chaleur :

$$\operatorname{div} \vec{j}_Q + \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

On peut généraliser cette équation dans le cas où on a des sources de chaleur dans le volume V :

Conservation de la chaleur

Si on appelle σ l'énergie interne reçue par unité de volume et par unité de temps autrement que par diffusion thermique (par ex. due à des sources de chaleur), l'équation de la chaleur devient :

$$\operatorname{div} \vec{j}_Q + \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma. \quad (5.3)$$

Point de math 1 : Intégration sur une surface

Pour faire une intégration sur une surface (fermée ou pas), il faut :

1. exprimer $\vec{dS}$ dans les coordonnées considérées :

$$\vec{dS} = dS \vec{n}$$

où dS est la surface élémentaire et $\vec{n}$ la normale de la surface.

2. Faire le produit scalaire
3. Intégrer le résultat sur la surface considérée.

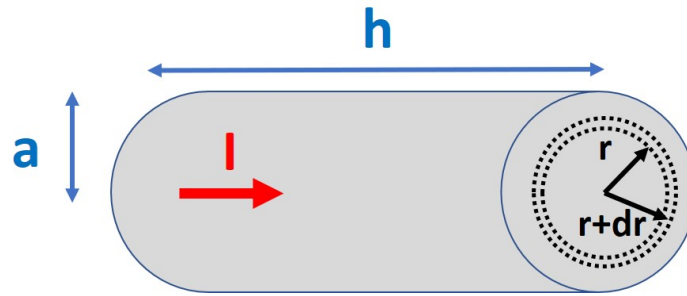
Exemple 1 : Intégrer sur une sphère $\vec{j}_Q = j_0 \vec{u}_r$.

$$\begin{aligned} \oiint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} &= \oiint j_0 \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} j_0 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= j_0 r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = j_0 r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi r^2 j_0. \end{aligned}$$

Exemple 2 : Soit un parallélépipède de longueur L suivant y et de hauteur h selon z , intégrer $\vec{j}_Q = j_0 \vec{u}_x + j_1 \vec{u}_y$ sur cette surface.

$$\begin{aligned} \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} &= \iint (j_0 \vec{u}_x + j_1 \vec{u}_y) \cdot (dy dz \vec{u}_x) = \iint j_0 \cdot dy dz \\ &= j_0 \int_{y=0}^L dy \int_{z=0}^h dz = Lh j_0. \end{aligned}$$

Application du cours 4 : Bilan thermique pour un câble cylindrique



On considère un câble cylindrique de rayon a , de résistivité ρ , de masse volumique μ , parcouru par un courant d'intensité I .

1. Déterminer la puissance volumique due à l'effet Joule.
2. Déterminer la quantité de chaleur diffusive qui traverse un cylindre de rayon r et de hauteur h pendant dt .
3. On considère le volume contenu entre les cylindres de rayon r et $r + dr$. Donner le bilan de chaleur diffusive.
4. Appliquer le premier principe pour le solide contenu entre les cylindres de rayon r et $r + dr$ et établir l'équation de la chaleur.

Réponse : 1. $\frac{dP}{dV} = \rho j^2$ où j est la densité volumique de courant. D'où $\frac{dP}{dV} = \frac{\rho I^2}{2\pi^2 a^4}$. 2. $\delta Q_{\text{cy1}} = j \delta Q_{\text{cy1}} = j \delta Q_{\text{cy1}} = j \delta Q_{\text{cy1}} = j \delta Q_{\text{cy1}}$. 3. $\delta Q_{\text{cy1}} = j \delta Q_{\text{cy1}} = j \delta Q_{\text{cy1}} = j \delta Q_{\text{cy1}}$. 4. $dU = \mu h 2\pi r dr dv \frac{dT}{dt} = \delta Q_{\text{diffusif}} + \delta Q_{\text{Joule}}$. D'où $\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j \delta Q) = \frac{\rho I^2}{2\pi^2 a^4}$.

5.2 Diffusion et loi de Fourier

5.2.1 Notion de diffusion

Définition

On appelle **diffusion** un transport menant à homogénéiser la distribution spatiale d'une quantité au sein d'un système. Les lois décrivant ces échanges sont historiquement phénoménologiques, et décrivent une proportionnalité entre le flux et le gradient de la distribution de la quantité observée.

5.2.2 Loi de Fourier

Définition

La **loi de Fourier** est une loi phénoménologique qui relie la densité de flux de chaleur au gradient de température, en introduisant la conductivité thermique $\lambda > 0$ (en $\text{J.K}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ou en $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$) :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (5.4)$$

★ La loi de Fourier met en équation le fait qu'une grande différence de température engendre un flux important de chaleur.

★ Cette loi n'est valable que lorsque les phénomènes considérés ne varient pas trop brutalement dans l'espace et dans le temps, ce qui sera toujours le cas dans le cadre de ce cours.

★ La conductivité thermique peut ne pas être homogène dans un solide ou un fluide donné, notamment si la température est inhomogène. Par exemple : l'air près d'un radiateur, une marmite que l'on vient de mettre sur le feu, etc...

★ **Ordres de grandeur** : $\lambda_{\text{Cuivre}} \simeq 400 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $\lambda_{\text{Eau}} \simeq 1 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$; $\lambda_{\text{Air}} \simeq 0.01 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

5.3 Interprétation microscopique : le cas du gaz parfait monoatomique

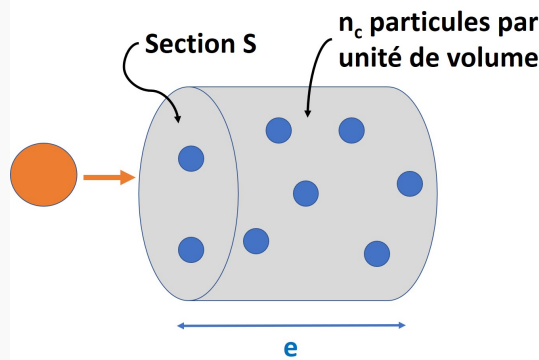
Que signifie la température à l'échelle microscopique ? Peut-on faire un lien entre les molécules qui composent la matière et la température ?

Définition

La **vitesse quadratique moyenne** v^* d'un gaz composé de molécules de masse m est telle :

$$\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_B T \quad (5.5)$$

★ On verra la démonstration de cette relation en TD.

Définition

Soit une particule incidente arrivant orthogonalement sur une cible fixe de section S , d'épaisseur e et contenant n_c particules par unité de volume.

La **section efficace de choc** σ est définie telle que la probabilité pour que la particule incidente ait un choc avec une des particules cibles est : $p_{\text{choc}} = \frac{\sigma}{S}$.

Le **libre parcours moyen** l correspond à la distance moyenne parcourue par la particule incidente entre deux chocs.

Le nombre de chocs que la particule incidente va avoir sur l'épaisseur e de la cible s'écrit :

On en déduit alors l'expression du libre parcours moyen :

Par ailleurs, si les molécules s'entrechoquent, cela signifie que la distance les séparant est inférieure à la somme de leur rayon, ce qui permet d'estimer la section efficace :

★ Pour un gaz parfait, les molécules sont supposées ponctuelles, et la section efficace de choc est nulle, et le libre parcours moyen infini, ce qui n'est pas physique. C'est l'une des limites du modèle !

Le cours en exemples 23 : Libre parcours moyen dans un gaz dilué

Estimer le libre parcours moyen pour un gaz dilué.

Réponse : On a $l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{k_B T} \cdot \frac{\sigma}{P}$. Avec $r \approx 10^{-10}$ m, $T \approx 300$ K et $P \approx 10^5$ Pa, on obtient $l \approx 10^{-7}$ m.

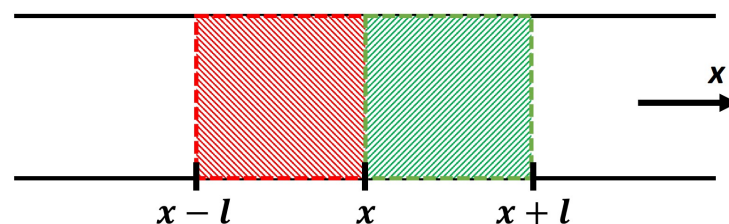
Le cours en exemples 24 : Durée moyenne entre deux chocs

Estimer la durée moyenne entre deux chocs pour un gaz dilué.

Réponse : La vitesse du gaz vaut $v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$. Pour l'air, on a $v^* = 500$ m.s⁻¹ et $\tau = \frac{l}{v^*} \approx 10^{-10}$ s.

On peut trouver l'expression de la loi de Fourier et de la conductivité thermique pour un gaz parfait monoatomique. Pour cela, on va se limiter au cas quasi-1D, c'est-à-dire que la température est de la forme $T(x, t)$. On va faire les hypothèses suivantes :

- Toutes les molécules ont eu leur dernier choc à l'instant t .
- Les chocs redistribuent les vitesses des particules de manière aléatoire. La vitesse vaut, en **norme**, v^* . On estime que les particules ont 1/6 de chances d'avoir une vitesse suivant $\vec{u}_x$, 1/6 selon $-\vec{u}_x$, 1/6 selon $\vec{u}_y$, 1/6 selon $-\vec{u}_y$, 1/6 selon $\vec{u}_z$, et 1/6 selon $-\vec{u}_z$. C'est une simplification extrême qui respecte l'isotropie du système.
- Entre t et $t + dt$, les molécules ont un mouvement uniforme et parcourent une distance égale au libre parcours moyen l .
- Les vitesses moyennes v^* sont uniformes (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de x). C'est rigoureusement faux puisque v^* dépend de la température.
- La densité moléculaire est supposée uniforme. C'est rigoureusement faux puisque la densité dépend de la température.
- En revanche, l'énergie interne par molécule dépend de la position : $u = \frac{3}{2}k_B T(x)$.
- En l'absence d'apport extérieur, la seule forme d'énergie pour un gaz parfait monoatomique est son énergie cinétique.
- On considère une conduite de section S .



On va faire le bilan de chaleur amenée par les molécules qui traversent l'abscisse x entre t et $t + dt$. Calculons tout d'abord le nombre de molécules qui vont passer de la droite vers la gauche (celles contenues dans le volume rouge) :

Celles-ci ont une énergie cinétique :

Puis le nombre de molécules qui vont passer de la gauche vers la droite (celles contenues dans le volume rouge) ont une énergie cinétique :

Ainsi, la quantité de chaleur qui traverse x pendant la durée dt vaut :

On vient donc d'établir la loi de Fourier pour un système quasi-1D, et la conductivité thermique pour un gaz parfait monoatomique vaut :

$$\lambda = \frac{1}{2} n_c k_B l v^* . \quad (5.6)$$

Pour de l'air à pression et température ambiantes, on trouve $\lambda \simeq 10^{-2} \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, en bon accord avec la valeur expérimentale.

★ Le modèle montre également que, pour un gaz parfait monoatomique, la conductivité thermique est indépendante de la pression :

Chapitre 6

Equation de la chaleur

Équation de la chaleur

En l'absence de source de chaleur et si la conductivité thermique est constante, on peut établir l'équation de la chaleur :

$$D_{th}\Delta T = D_{th} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.1)$$

où on définit le coefficient de diffusion thermique (en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) :

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c_V}. \quad (6.2)$$

★ Démonstration :

★ Attention : le symbole " Δ " de l'équation de la chaleur signifie ici le "laplacien" (voir chapitre 3 sur l'analyse vectorielle).

★ Attention (2) : ne pas confondre l'équation de la chaleur avec l'équation **de conservation** de la chaleur !

★ L'équation de la chaleur est une **équation de diffusion** (de la chaleur, ici) formellement (c'est-à-dire mathématiquement) analogue à l'équation de diffusion des particules, nous reviendrons sur ce point. Une équation de diffusion relie les dérivées (secondes) dans l'espace d'une quantité scalaire à la dérivée temporelle de la même quantité. Le coefficient de diffusion D_{th} a donc pour unité des $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

★ Ainsi, par analyse dimensionnelle, le **temps caractéristique** τ qu'il faut à la chaleur pour

diffuser sur une **longueur caractéristique** L est tel que :

$$D_{th} = \frac{L^2}{\tau} \tag{6.3}$$

★ Les équations de diffusion ne sont pas invariantes par renversement du temps. En d'autres termes, si on remplace t par $-t$, on n'obtient pas la même équation, mais leur opposé. C'est le signe que la diffusion est un **processus irréversible**.

★ Il faut retenir que **l'équation de la chaleur couple l'espace et le temps**. Autrement dit, l'évolution de la température dépend à la fois de où on est et à quel instant.

★ Dans le cadre de ce cours, on se limitera à des résolutions simples. Vous verrez une méthode générale de résolution des équations de diffusion dans le cours sur les ondes en L3.

Illustration 3 : Température du sol

Comme illustré figure 6.1, les variations journalières ou annuelles de la température de l'air à la surface de la terre se répercutent dans le sol par une température variable dans le temps et l'espace.

À une profondeur donnée, la température varie, mais avec un certain retard par rapport aux variations à la surface de la terre, le temps que l'onde thermique se propage dans le sol.

Par ailleurs, plus on est profond dans la terre, plus ces variations sont atténuées par l'inertie thermique de la terre (due à la capacité thermique).

En-dessous de 10 m, on peut considérer que la température du sol est quasiment constante tout au long de l'année et égale à $T_{sol} \simeq \frac{T_{min} + T_{max}}{2}$.

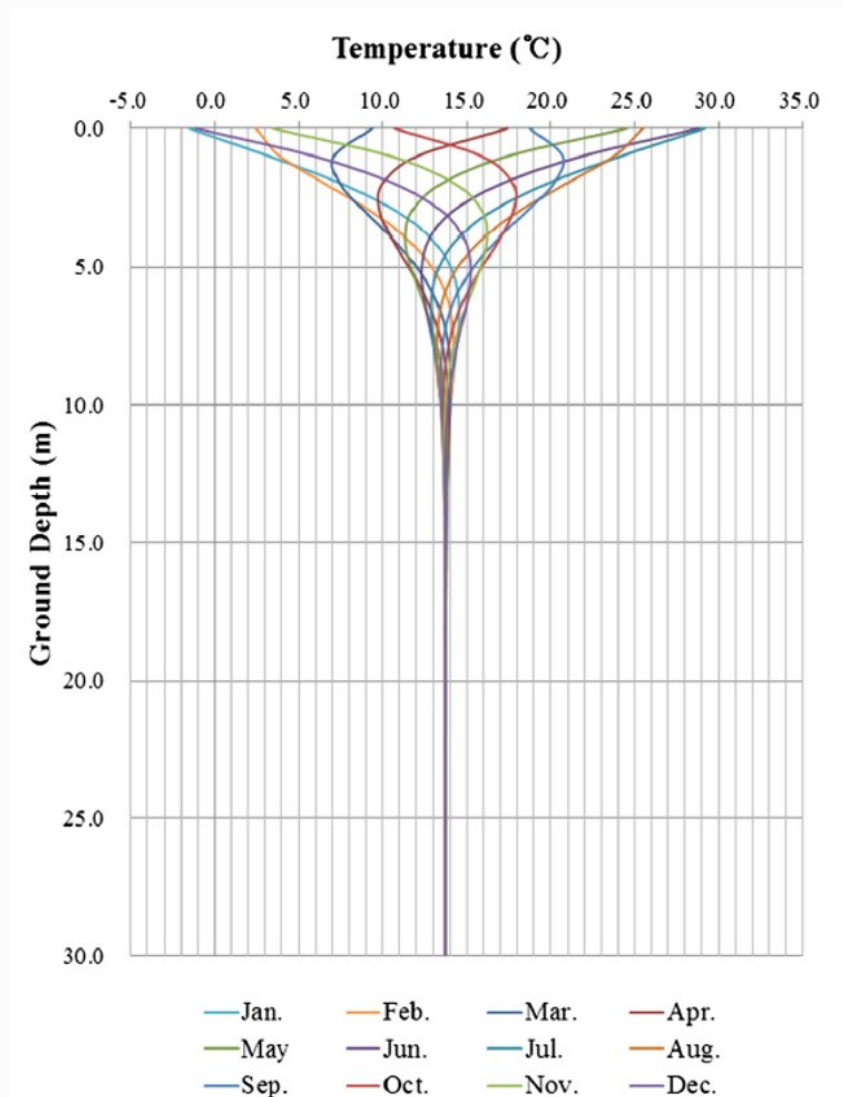
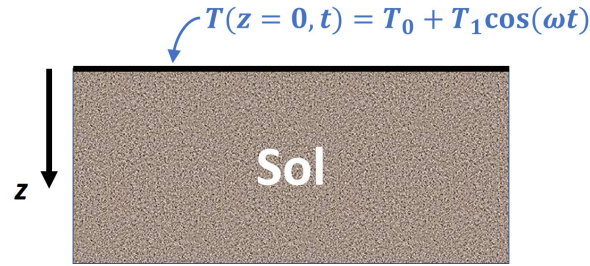


FIGURE 6.1 – Évolution de la température du sol en fonction de la profondeur pour les différents mois de l'année à Séoul (Corée du sud). Song et al. *Energy Sust. Dvlpt.* **23** 150 2014.

Application du cours 5 : Propagation de la chaleur dans le sol



Le demi-espace $z > 0$ est un milieu de conductivité thermique λ , de capacité thermique c_V et de masse volumique μ . z est dirigé vers le bas. Le demi-espace $z > 0$ représente donc le sol. La température à la surface est de la forme :

$$T(z = 0, t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$$

1. Quelle est la valeur de ω si on veut étudier les variations journalières de température ?
2. Quelle est la valeur de ω si on veut étudier les variations annuelles de température ?
3. La valeur du coefficient de diffusion thermique du sol est d'environ $D_{th} = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Estimer la longueur typique sur laquelle les variations de température journalières se propagent. Faire de même pour les variations annuelles.
4. Montrer que $T(z, t) = T_0 + \alpha \exp^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$ est une solution de l'équation de la chaleur. Exprimer δ en fonction de D_{th} et ω . Comparer δ à la longueur caractéristique estimée à la question précédente.
5. Exprimer α en fonction de T_1 .
6. Comparer l'allure de $T(z, t)$ à la figure 6.1.

Réponse : 1. $\omega_j = \frac{2\pi}{T_j} = 2.3 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$. 2. $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 2 \times 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$. 3. On a $L_j \approx D_{th} T_j \approx 30 \text{ cm}$ et $L_a \approx D_{th} T_a \approx 5 \text{ m}$. Les variations annuelles de température sont plus lentes mais pénètrent plus profond dans le sol. 4. $\omega = \frac{2\pi}{T_j}$. 5. $\alpha = \frac{\delta^2}{2D_{th}}$.

Application du cours 6 : Propagation de la chaleur dans une barre



On considère une barre cylindrique homogène, de section S , de conductivité thermique λ , de capacité thermique c_V et de masse volumique μ . Les extrémités $z = 0$ et $z = L$ de la barre sont maintenues à la température T_0 par contact avec un thermostat. À $t = 0$, on a :

$$T(z, t = 0) = T_0 + T_1 \sin \frac{\pi z}{L}$$

On pose : $\theta(z, t) = T(z, t) - T_0$.

1. Quelles sont les conditions aux limites $\theta(z = 0, t)$ et $\theta(z = L, t)$?
2. Compte tenu de ces conditions aux limites, on va chercher des solutions factorisées du type : $\theta(z, t) = f(z)g(t)$, que l'on appelle des **ondes stationnaires**. Déterminer les équations différentielles auxquelles obéissent $f(z)$ et $g(t)$.
3. Déterminer $f(z)$.
4. Déterminer $g(t)$.
5. Exprimer le temps caractéristique du régime transitoire τ en fonction de L et D_{th} .
6. Tracer $T(z, t)$ pour : i. une position z donnée à tous les temps ; ii. un temps t donné dans toute la barre.

Réponse : 1. $\theta(z = 0, t) = \theta(z = L, t) = 0$. 2. $D_{th} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$. 3. $f(z) = \sin \frac{\pi z}{L}$. 4. $g(t) = \exp(-t/\tau)$. 5. $\tau = \frac{L^2}{D_{th} \pi^2}$.

Chapitre 7

Analogies avec d'autres phénomènes

Dans cette section, on va voir que la conduction thermique est analogue à d'autres phénomènes de transport.

7.1 Diffusion de particules

Le transport de particules est dû à une inhomogénéité de la concentration de particules n . On peut alors définir le vecteur de **densité de courant particulaire** :

$$\vec{j}_n = n \vec{v}, \quad (7.1)$$

où $\vec{v}$ est la vitesse des particules. On a alors la **loi phénoménologique de Fick** qui relie la variation de n à $\vec{j}_n$:

$$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n, \quad (7.2)$$

où D est le coefficient de diffusion particulaire (en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$). Par ailleurs, l'**équation de conservation du nombre de particules** s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_n. \quad (7.3)$$

Ainsi, on peut établir l'**équation de diffusion des particules** :

$$D \Delta n = \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (7.4)$$

Par ailleurs, le flux de particules à travers une surface S s'écrit :

$$\varphi = \iint_S \vec{j}_n \cdot d\vec{S}. \quad (7.5)$$

On voit que l'on a formellement exactement les mêmes équations pour la diffusion de particules que pour la diffusion de la chaleur ! Les méthodes de résolution des problèmes sont donc les mêmes !

7.2 Conduction électrique

Le transport de charges électriques (ou conduction électrique) est dû à une inhomogénéité du potentiel électrostatique V . On peut alors définir le vecteur de **densité de courant de charges** :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (7.6)$$

où ρ est la densité volumique de charges q et $\vec{v}$ leur vitesse. On a alors la **loi d'Ohm** qui relie V à $\vec{j}$:

$$\vec{j} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V = \sigma \vec{E}, \quad (7.7)$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique auquel sont soumises les charges et σ est la conductivité du milieu. L'équation de conservation de la charge s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}. \quad (7.8)$$

Jusqu'ici, on a formellement exactement les mêmes équations pour la conduction électrique que pour la conduction thermique. La différence est que le potentiel électrostatique V n'est pas proportionnel à la densité de charges ρ (contrairement à la diffusion de la chaleur ou de particules), **ce qui ne permet pas d'écrire une équation de diffusion de la charge** comme précédemment. Néanmoins, le flux de charges à travers une surface S , c'est-à-dire le **courant** I , s'écrit :

$$I = \varphi_Q = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}, \quad (7.9)$$

7.3 Retour sur la conduction de la chaleur

Ces analogies sont particulièrement utiles pour se forger une intuition de ce qui se passe lors de la conduction thermique. Par exemple on peut définir le flux thermique et la conductivité thermique de manière analogue à ce que l'on fait pour le transport de charge.

Définition

Le **flux thermique** ϕ à travers une surface orientée $\vec{dS}$ est tel que :

$$\phi = \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS}.$$

C'est l'analogue de l'intensité électrique qui est définie par $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$.

La **conductivité thermique** λ est l'analogue de la conductivité électrique σ . On peut donc définir une **résistance thermique** :

$$R_{th} = \frac{e}{S\lambda} \quad (7.10)$$

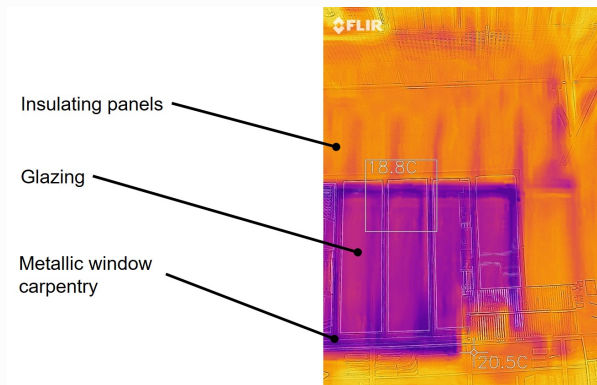
où e est l'épaisseur du matériau à travers lequel il y a conduction thermique, et S est sa section. Les résistances thermiques sont exprimées en K.W^{-1} . On utilise souvent la résistance thermique par carré :

$$R_{th}^{\square} = \frac{e}{\lambda} = \frac{1}{U}, \quad (7.11)$$

qui correspond à la résistance thermique par unité de section (c'est-à-dire avec $S = 1$ dans l'équation 7.10). $R_{th}^{\square}$ est en $\text{K.m}^2.\text{W}^{-1}$ et U est appelé le **coefficient thermique** ou **valeur U** (en $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$). Ces notations sont particulièrement utiles dans le domaine de la construction.

Illustration 4 : Caméras thermiques

Les caméras thermiques mesurent le rayonnement infrarouge émis par les objets. La figure ci-dessous montre un exemple d'image infrarouge, où on voit la superposition de l'image visible (lignes grises) avec l'image IR codées en fausse couleur (chaque couleur correspond à une température de rayonnement différente). On voit un mur et une fenêtre (en bleu) en hiver. Comme on peut le voir, le cadre métallique de la fenêtre conduit le froid, ce qui est à l'origine de pertes thermiques. On peut aussi voir les bordures des panneaux d'isolation du mur : les jonctions ne sont pas optimales et font des ponts thermiques qui sont aussi responsables de pertes de chaleur.



Le cours en exemples 25 : Conductivité thermique de matériaux de construction

La figure 7.1 donne des valeurs de λ pour des matériaux de construction typiques. Calculer l'épaisseur de matériau que l'on doit avoir pour obtenir $R_{th}^{\square} = 1 \text{ K.m}^2.\text{W}^{-1}$, pour une section de 1 m^2 , pour :

1. des briques,
2. du béton renforcé,
3. du verre,
4. de la mousse de polyuréthane rigide.

Materials	Thermal conductivity (W/m.K)	Density (kg/m ³)
Brick Veneer	0.80	1700
Re-inforced concrete	0.50	1400
Timber	0.15	650
Single glass window	0.65	2500
External rendering	0.25	1300
Tile concrete	0.84	1900
Cast concrete slab	1.13	2200
Expanded polystyrene	0.034	24
Polyurethane rigid foam	0.023	32
Sisalation foil	0.035	25
Plasterboard	0.25	950

FIGURE 7.1 – Valeurs de la conductivité thermique et de la densité pour des matériaux usuels de construction. Source : Aldawi *Proc. Eng.* **56** 661 2013.

Réponse : 1. $e=80$ cm pour les briques. 2. $e=50$ cm pour le béton renforcé. 3. $e=65$ cm pour le verre. 4. $e=2.3$ cm pour la mousse de polyuréthane rigide. Ceci montre à quel point la mousse de polyuréthane est un bon isolant.

Application du cours 7 : Conductivité thermique d'une fenêtre

L'analogie électrique est souvent utile pour analyser des arrangements complexes de matériaux en termes de résistances en parallèle ou en série. Déterminer l'assemblage équivalent de résistances des deux exemples de la figure 7.2.

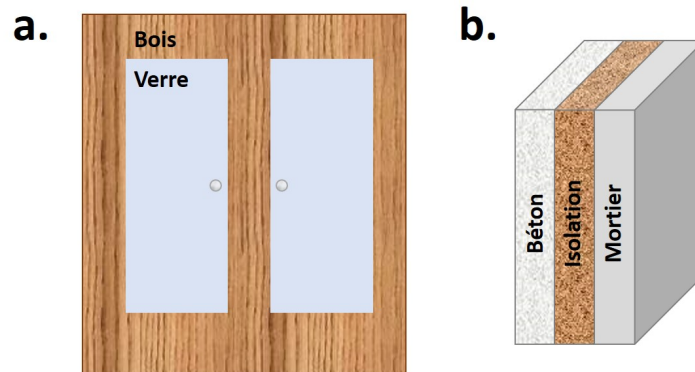


FIGURE 7.2 – Exemples de résistances thermiques.

Réponse : a. Deux résistances en parallèle. b. 3 résistances en série.

7.4 Bilan

Il est utile d'appliquer la notion de conservation au cours du temps et dans l'espace à des quantités très variées : évolution du nombre de particules, d'écoulement d'eau dans un tuyau, de chaleur dans un radiateur, de charges dans un semiconducteur, de population dans le métro, etc. On appelle cette généralisation la notion de bilan d'une quantité dans un système, outre les équations de conservation, cette notion fait également appelle aux notions de transport (flux de particules, de chaleur) et de diffusion (échange suivant un gradient). Pour faire un bilan il nous faut d'abord définir la notion de système.

7.4.1 Notion de système

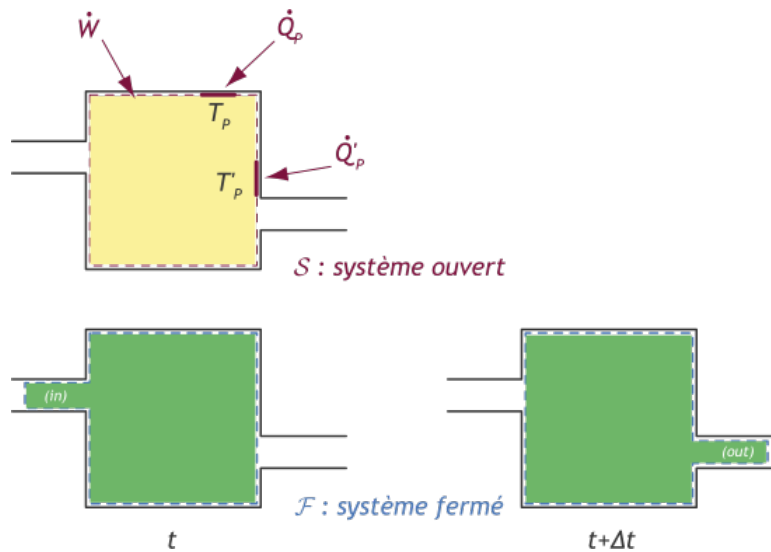


FIGURE 7.3 – Illustration de la différence entre un système ouvert et un système fermé. Crédit : Jacques Schwartzentruber.

Définition

On appelle **système**, noté Σ une portion d'espace délimitée par une frontière. Il existe deux types de système :

un **système fermé** est un système clos ne permettant pas l'échange de matière entre l'intérieur et l'extérieur de ses frontières (échange d'énergie ou d'information possible). Ex : un ballon de baudruche gonflé, le système de refroidissement d'un réfrigérateur, une portion de rivière suivant la vitesse de l'eau.

un **système ouvert** est un système autorisant l'échange de matière entre l'intérieur et l'extérieur (ainsi que les échanges d'énergies et d'information a priori). Ex : le boulevard périphérique, la portion de l'Yvette se situant sur la commune d'Orsay, le fil d'une ampoule.

La figure 7.3 illustre un système fermé et un système ouvert.

Il est important de comprendre qu'un même problème peut être traité en définissant un système fermé ou un système ouvert. Par exemple si l'on s'intéresse à l'écoulement d'un fluide dans un tuyau, en fonction du problème, il peut être plus intéressant de définir le système ouvert : une portion fixe de tuyau (Σ constant, localisé et inamovible) avec une quantité de fluide variable entrant et sortant du tuyau, ou fermé : suivre au cours du temps le même élément de fluide dans le tuyau et donc de faire bouger le système ($\Sigma = \Sigma(t)$) au cours du temps comme illustré sur l'image 7.3.

7.4.2 Lois de diffusion

La loi de Fourier que vous avez déjà vue, est une loi de diffusion décrivant les échanges de chaleur :

$$\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla}(T) \quad (7.12)$$

avec $\vec{j}$ la densité de flux thermique (W.m^{-2}), T la distribution de la température dans l'espace (K) et λ la conductivité thermique ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$).

La loi de Fick est une loi de diffusion décrivant l'évolution d'un flux de particules :

$$\vec{j}_N = -D \vec{\nabla}(\rho) \quad (7.13)$$

avec $\vec{j}_N$ le flux de matière ($\text{m}^{-2}.\text{s}^{-1}$), D le coefficient de diffusion ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) et ρ la densité de particule (m^{-3}).

La loi de Darcy est une loi de diffusion décrivant l'évolution du débit d'un fluide incompressible dans un milieu poreux :

$$\vec{q} = -KA \vec{\nabla}(H) \quad (7.14)$$

avec $\vec{q}$ le débit du fluide ($\text{m}^3.\text{s}^{-1}$), K le coefficient de diffusion ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$), A la surface de contact (m^2) et H la charge hydraulique (homogène à une longueur en m).

7.4.3 Bilan dans un système

La notion de bilan s'intéresse donc à l'évolution d'une quantité, ici notée N , dans un système $\Sigma(t)$. On se penchera ici sur l'évolution d'un nombre de particules mais cela se généralise à d'autres grandeur physique (fluide, chaleur, etc). Soit $N_{\Sigma}(t)$ la quantité totale de particules au cours du temps dans le système $\Sigma(t)$ et $\rho_n(x, y, z, t)$ la densité de particules (en m^{-3}) au point $M(x, y, z)$ et à l'instant t . Alors :

$$N_{\Sigma_0}(t) = \iiint_{\Sigma_0} \rho_n(x, y, z, t) dx dy dz \quad (7.15)$$

Maintenant pour évaluer l'évolution de $N_{\Sigma}(t)$, il nous faut définir un système.

Système ouvert Soit Σ_0 ouvert, fixe, indéformable, et intéressons nous à l'évolution du nombre de particules dans ce volume (ouvert = flux de matière autorisé). L'évolution du nombre de particules au cours du temps est donc simplement (simple car Σ_0 fixe donc dx , dy et dz ne dépendent pas de dt !) :

$$\frac{dN_{\Sigma_0}(t)}{dt} = \iiint_{\Sigma_0} \frac{\partial \rho_n(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz \quad (7.16)$$

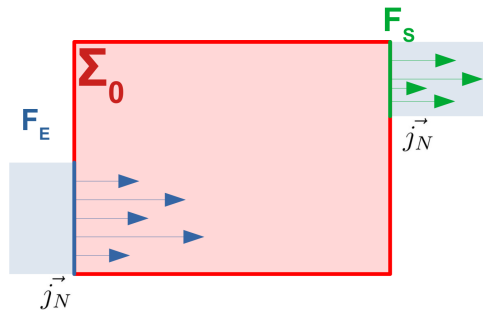


FIGURE 7.4 – Illustration du bilan de particules dans un système ouvert Σ_0 .

Il s'agit maintenant de comprendre ce qu'est cette évolution. Il s'agit de flux entrant et sortant de particules. On définit donc $\vec{j}_N(x, y, z, t)$ dans tout l'espace comme la densité de courant de particules. Il s'exprime en $\text{m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ et on a $\vec{j}_N = \rho_n \times \vec{v}$ avec $\vec{v}$ la vitesse des particules. Ainsi, le flux de particule ϕ_i sur une surface S_i est par définition le nombre de ces particules

traversant la surface orientée par $\vec{n}_S$ pendant un temps dt . Soit le nombre de particules étant compris dans le tube $\vec{v} \cdot \vec{n}_S \times dt \times dS$. Autrement dit :

$$\phi_i = \iint_{S_i} \rho_n(\vec{v} \cdot \vec{n}_S \times dt \times dS) = \iint_{S_i} \vec{j}_N \cdot \vec{n}_S dS dt \quad (7.17)$$

Ces particules entrent par une surface notée F_E et sortent par la surface F_S . La variation $dN_{\Sigma}(t)$ au cours d'un intervalle de temps dt , peut également être comprise comme étant la différence entre le nombre de particules entrantes ($\vec{j}_N \cdot \vec{n}_E$ avec $\vec{n}_E$ le vecteur normal à la surface F_E) et le nombre de particules sortantes du système ($\vec{j}_N \cdot \vec{n}_S$ avec $\vec{n}_S$ le vecteur normal à la surface F_S). Ainsi :

$$dN_{\Sigma_0}(t) = \phi_N(t)dt \quad \text{avec} \quad \phi_N = \vec{j}_N(F_E) \cdot \vec{n}_E - \vec{j}_N(F_S) \cdot \vec{n}_S \quad (7.18)$$

soit finalement

$$\frac{dN_{\Sigma_0}(t)}{dt} = \phi_N(t) = \vec{j}_N(F_E) \cdot \vec{n}_E - \vec{j}_N(F_S) \cdot \vec{n}_S \quad (7.19)$$

On peut généraliser cette idée à l'ensemble des sorties et entrées de particules dans le système Σ_0 . Il s'agit donc de sommer algébriquement les flux entrants et sortants de Σ_0 sur l'ensemble de la surface du système noté S , avec $\vec{n}_S$ le vecteur normal à la surface.

$$\phi_N(t) = \oiint_S \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS \quad (7.20)$$

Or d'après le théorème de Green-Ostrogradski, le bilan de flux entrant/sortant, peut se réécrire comme la divergence du courant dans tout le volume.

$$\oiint_S \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS = \iiint_{\Sigma_0} \text{div}(\vec{j}_N(x, y, z, t)) dx dy dz \quad (7.21)$$

Donc finalement on a :

$$\iiint_{\Sigma_0} \frac{\partial \rho_n(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz = \iiint_{\Sigma_0} \text{div}(\vec{j}_N(x, y, z, t)) dx dy dz \quad (7.22)$$

En simplifiant l'écriture on obtient l'équation de conservation :

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \text{div}(\vec{j}_N). \quad (7.23)$$

Cette équation de conservation se généralise à beaucoup de quantité, y compris thermodynamiques, comme la chaleur, que vous avez vu dans un chapitre précédent.

Dans un système fermé Dans un système fermé noté $\Sigma_f(t)$, on suit au cours du temps les mêmes particules. C'est le volume qu'on adapte. Cela dit on cherche toujours la même chose, le nombre de particules dans Σ_0 et $\Sigma_f(t)$ est une façon d'y parvenir.

$$N_{\Sigma_f}(t) = N_{\Sigma_0}(t) + \delta_E \quad (7.24)$$

$$N_{\Sigma_f}(t + dt) = N_{\Sigma_0}(t + dt) + \delta_S \quad (7.25)$$

Or le système étant fermé, il n'y a pas d'échange de matière avec l'extérieur. Donc :

$$N_{\Sigma_f}(t) = N_{\Sigma_f}(t + dt) \quad (7.26)$$

$$\Leftrightarrow N_{\Sigma_0}(t) + \delta_E = N_{\Sigma_0}(t + dt) + \delta_S \quad (7.27)$$

$$N_{\Sigma_0}(t + dt) - N_{\Sigma_0}(t) = \delta_E - \delta_S \quad (7.28)$$



FIGURE 7.5 – Illustration du bilan de particules dans un système fermé

Et donc on a :

$$\frac{dN_{\Sigma_0}(t)}{dt} = \frac{\delta_E - \delta_S}{dt} \quad (7.29)$$

Pour les même raisons que précédemment, on sait que le nombre de particules dans δ_E est la somme des particules étant présentes dans le tube de surface dS et de profondeur $\vec{v} \cdot \vec{e}_x \times dt$. De même pour δ_S . Il est clair que si δ_E est positif alors δ_S est négatif puisque $\vec{e}_x$ ne change pas de sens. D'où le signe opposé entre δ_E et δ_S .

$$\delta_E = \iint \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS dt \text{ et } \delta_S = \iint \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS dt. \quad (7.30)$$

On retrouve bien

$$\frac{dN_{\Sigma_0}(t)}{dt} = \oiint_S \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS \quad (7.31)$$

et donc finalement, via Green-Ostrogradski, l'équation de conservation :

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \text{div}(\vec{j}_N) \quad (7.32)$$