Interrogation - Physique

Vendredi 7 Novembre 2025

Durée : 3 heures (4 heures pour les tiers-temps).
ATTENTION : *s'il y a trop de flèches qui manquent sur les vecteurs ou s'il manque des unités, des points seront enlevés !*

* = facile, ** = exercice d'application, *** = plus dur !

Exercice 1* : Vrai ou Faux ($\sim$ 2 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est Vraie ou Fausse. Justifier *brièvement.*

1/ Un système pseudo-isolé est nécessairement immobile.

2/ Le travail d'une force s'exprime en Joule.

3/ Deux vecteurs colinéaires ont un produit scalaire nul.

4/ Soit une masse subissant une force de gravitation et ayant un mouvement circulaire. La force de gravitation peut avoir un travail non nul.

5/ Le moment cinétique d'un système est orthogonal à son vecteur position.

6/ Le moment d'inertie d'un système dépend de sa masse.

7/ L'énergie mécanique d'un système ne varie au cours du temps que s'il subit des forces non-conservatives.

8/ Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ est colinéaire à $\overrightarrow{F}$.

Exercice 2* : Bases, produit scalaire et produit vectoriel ($\sim$ 1.5 points)

Suivant les cas, $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ et $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ sont des bases orthonormées directes. Dans les calculs, vous ferez attention à ne pas confondre produit vectoriel et produit scalaire !

1/ Est-ce que $(\overrightarrow{u}_z, -\overrightarrow{u}_y, -\overrightarrow{u}_x)$ est une base directe ou indirecte ?

2/ Est-ce que $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_r, -\overrightarrow{u}_z)$ est une base directe ou indirecte ?

3/ $(2\overrightarrow{u}_x - \overrightarrow{u}_y + 5\overrightarrow{u}_z) \wedge (-\overrightarrow{u}_x + 2\overrightarrow{u}_y + 3\overrightarrow{u}_z)$

4/ $(\overrightarrow{u}_\theta - 4\overrightarrow{u}_z) \wedge (2\overrightarrow{u}_r - 2\overrightarrow{u}_\theta)$

5/ $2\overrightarrow{u}_z \wedge [\overrightarrow{u}_y . (-2\overrightarrow{u}_x + 4\overrightarrow{u}_y)]\, \overrightarrow{u}_y$

6/ $[(\overrightarrow{u_y} - 5\overrightarrow{u}_z) . \overrightarrow{u}_y]\, (5\overrightarrow{u}_y \wedge \overrightarrow{u}_x)$

Exercice 3* : Lucky Luke fait tourner son lasso ($\sim$ 2.25 points)

Dans les exercices 3 à 5, on va étudier comment Lucky Luke lance son lasso pour attraper les Daltons. On va décomposer le mouvement que Lucky Luke effectue en quelques secondes.

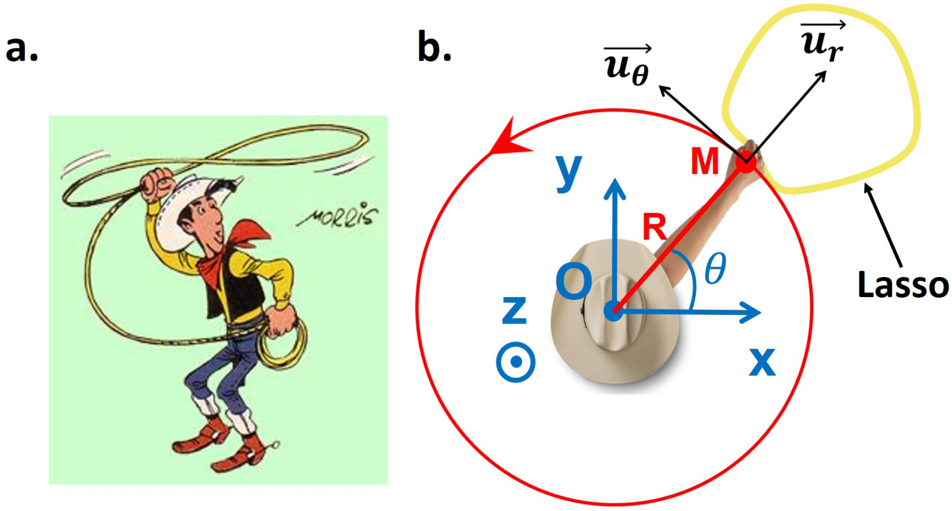

FIGURE 1 – **a.** Lucky Luke lance son lasso. **b.** Modélisation physique du problème. Le dessin n'est pas à l'échelle. Sources : Morris, Shutterstock, ctic.

La première étape pour Lucky Luke est de faire tournoyer son lasso. Pour cela, on appelle M la position de sa main droite qui tient le lasso. Lucky Luke fait tourner sa main selon un cercle de centre O et de rayon R. Le mouvement du lasso se fait dans le plan Oxy. On adopte les notations de la figure 1.b.

1/ Exprimer $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction de $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et θ.

2/ Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, puis dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

3/ Exprimer la vitesse du point M, $\vec{v}$, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, puis dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

4/ Exprimer l'accélération du point M, $\vec{a}$, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, puis dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

5/ Exprimer le vecteur rotation $\vec{\omega}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et $\vec{u}_z$.

Exercice 4*** : Comment accélérer un lasso ($\sim$ 4 points)

On modélise la boucle du lasso par une masse ponctuelle m en mouvement circulaire de rayon $R(t)$ autour de l'axe vertical Oz. On considère que la masse a une vitesse angulaire $\omega(t)$.

1/ Exprimer la vitesse tangentielle $v(t)$ de la masse m en fonction de $R(t)$ et de $\omega(t)$.

2/ Exprimer le moment d'inertie de la bouche du lasso par rapport au point O en fonction des données du problème.

3/ Exprimer le moment cinétique de la boucle du lasso par rapport au point O en fonction des données du problème.

4/ Énoncer le théorème du moment cinétique.

5/ Dans un premier temps, on néglige le poids du lasso et on suppose que la seule force qui s'exerce sur le lasso est la tension due à la main et s'écrit $\vec{F} = F\vec{u}_r$, où $\vec{u}_r$ est le vecteur radial usuel dans le plan Oxy.

(a) Exprimer le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport au point O.

(b) Si à $t = 0$ le rayon de la trajectoire vaut R_0 et la vitesse tangentielle v_0, exprimer le moment cinétique du lasso par rapport au point O à tout instant.

(c) En déduire que $R(t)v(t) = R_0 v_0$.

(d) Que doit faire Lucky Luke pour que la vitesse tangentielle du lasso augmente ?

(e) Application numérique : on suppose que $m = 0{,}5$ kg, le rayon initial $R_0 = 1{,}20$ m, et la vitesse tangentielle initiale $v_0 = 5$ m.s^{-1}. Si le nœud coulant de la boucle se resserre jusqu'à $R = 0{,}60$ m (moitié du rayon initial), que vaut la vitesse tangentielle ?

6/ On va maintenant considérer un modèle plus réaliste où le lasso est une corde continue soumise à la tension du bras et à son poids. La corde forme un cercle de centre O dont le rayon $R(t)$ peut a priori varier.

(a) On appelle λ la masse linéique (masse par unité de longueur) de la corde. Calculer le moment d'inertie de la boucle du lasso (de masse totale $m(t)$, de rayon $R(t)$) d'abord en fonction de λ et $R(t)$, puis en fonction de $m(t)$ et $R(t)$.

(b) Écrire l'équation qu'implique le théorème du moment cinétique pour le lasso, soumis au moment du poids $\overrightarrow{\Gamma}_P$ et à la tension exercée par Lucky Luke via son bras $\overrightarrow{\Gamma}_T$.

(c) Calculer le moment du poids par rapport à O. Pour cela, on intégrera sur tout le cercle le moment du poids d'un petit morceau de corde. Le poids a-t-il une influence sur la rotation du lasso ?

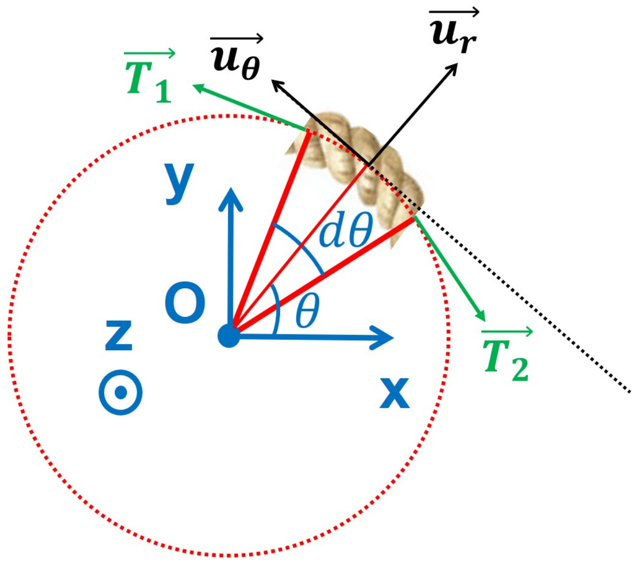

FIGURE 2 – Forces de tension s'exerçant sur un morceau de corde. Sources : Freepik.

(d) La tension exercée par le bras de Lucky Luke se transmet à la corde. Ainsi, un petit élément d'arc d'angle dθ de la boucle subit une force $\overrightarrow{T}_1$ à son extrémité $\theta + d\theta/2$ et une force $\overrightarrow{T}_2$ à son extrémité $\theta - d\theta/2$. Les deux forces ont une norme T et sont orientées tangentiellement à la corde comme schématisé figure 2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le petit élément de corde et établir, dans l'approximation $\sin d\theta/2 \simeq d\theta/2$, la relation entre T, ω et $R(t)$.

(e) Quand la tension augmente, la boucle rétrécit (R diminue). Quelle est la conséquence pour la vitesse de rotation ?

Exercice 5* : Lucky Luke attrape les Daltons ($\sim$ 2 points)

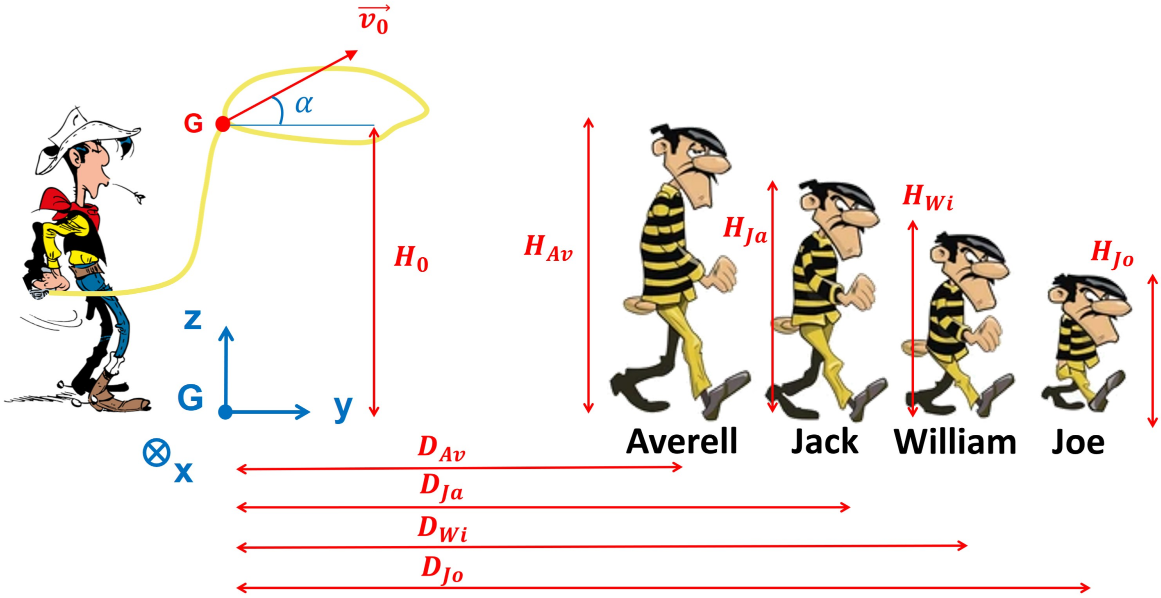

FIGURE 3 – Lucky Luke lance son lasso sur les Daltons. Source : Morris.

Une fois que le lasso (masse m, centre de masse G) a acquis une vitesse suffisante, pour essayer d'atteindre les Daltons, Lucky Luke le lance à $t = 0$ d'une hauteur H_0 et avec une vitesse $\vec{v}_0$ qui fait un angle $\alpha = 30^{\circ}$ avec l'axe Oy. Le Dalton le plus proche de Lucky Luke est Averell à une distance D_{Av}, qui est aussi le plus grand (H_{Av}). Vient ensuite Jack (D_{Ja}, H_{Ja}), William (D_{Wi}, H_{Wi}) et Joe (D_{Jo}, H_{Jo}), comme schématisé figure 3.

1/ Déterminer la position $(x(t), y(t), z(t))$ du centre de masse du lasso à tout instant (on négligera les frottements). Attention à bien adopter les notations du problème. Vous ferez en particulier attention aux axes selon lesquels a lieu le mouvement.

2/ Déterminer l'équation de la trajectoire du lasso dans le plan Oyz, c'est-à-dire l'équation $z(y)$.

3/ Avec le lasso, Lucky Luke ne peut attraper qu'un seul des Daltons. On suppose qu'un Dalton est attrapé si le centre de masse du lasso arrive en haut de sa tête. On donne $\|\vec{v}_0\| = 10$ m.s^{-1}, $H_0 = 2$ m, et

$$\begin{aligned} H_{Av} &= 2{,}20 \text{ m}, & D_{Av} &= 9{,}00 \text{ m},\\ H_{Ja} &= 1{,}70 \text{ m}, & D_{Ja} &= 9{,}50 \text{ m},\\ H_{Wi} &= 1{,}23 \text{ m}, & D_{Wi} &= 10{,}00 \text{ m},\\ H_{Jo} &= 0{,}30 \text{ m}, & D_{Jo} &= 11{,}00 \text{ m}. \end{aligned}$$

Déterminer si l'un des Daltons est attrapé.

4/ Le Dalton le plus dangereux est Joe. Quelle aurait due être la vitesse de lancer du lasso pour que Joe soit attrapé et ainsi neutraliser les Daltons ?

Exercice 6** : Les Daltons s'échappent ($\sim$ 3 points)

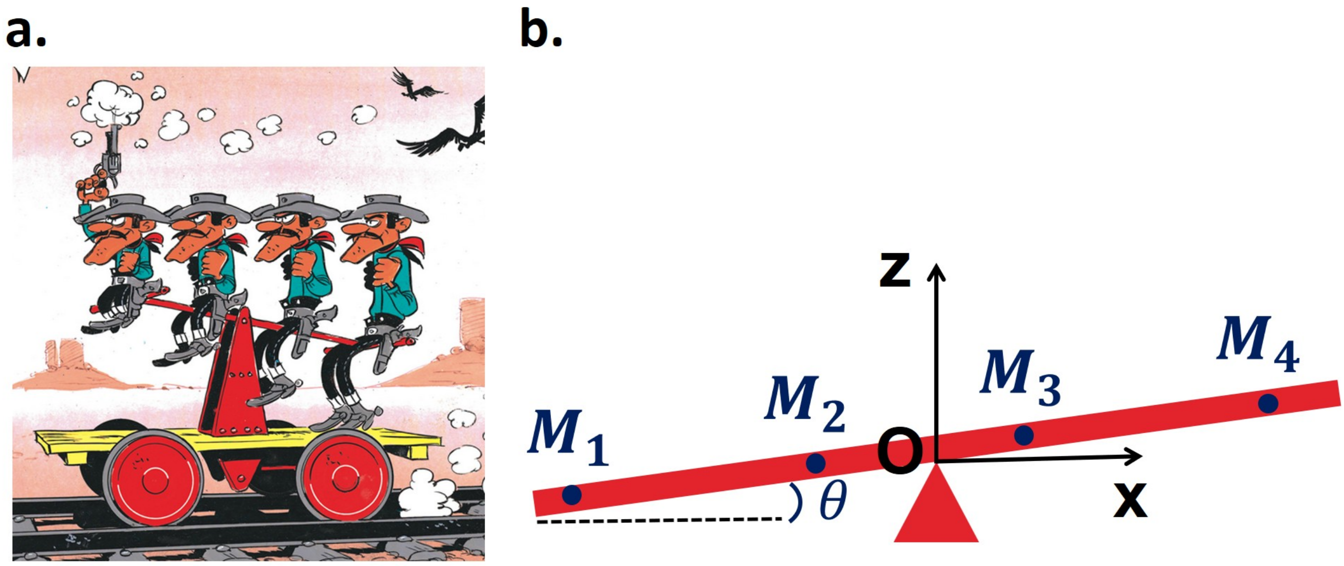

FIGURE 4 – a. Les Daltons s'échappent. b. Modélisation de la balançoire sur laquelle les Daltons sont assis. Source : Morris.

Malheureusement, les Daltons s'échappent et s'enfuient sur un chariot propulsé par un effet balançoire. On appelle M_1 la position de Joe ($m_{Joe} = 50$ kg), M_2 la position de William ($m_{Will} =$ 70 kg), M_3 la position de Jack ($m_{Jack} = 90$ kg), M_4 la position d'Averell ($m_{Av} = 100$ kg). Le mouvement de la balançoire (longueur L, masse totale M) se fait dans le plan Oxz, comme indiqué figure 4, et la rotation se fait autour du point O, situé au centre de la balançoire. On note θ l'angle que fait la balançoire avec l'horizontale.

1/ Quel est l'axe de rotation de la balance ?

2/ Exprimer $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ et $\overrightarrow{OM_4}$ dans le repère $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ en fonction des distances OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 et θ.

3/ Faire un bilan des forces auxquelles est soumise la balançoire et calculer le moment de chaque force en fonction des données du problème. Le poids de la balançoire influe-t-il le mouvement ?

4/ Initialement, $OM_1 = 1.5$ m, $OM_2 = 0.2$ m, $OM_3 = 1.25$ m, $OM_4 = 1.6$ m. De quel côté penche la balançoire ?

5/ De combien doivent se déplacer Jack et Averell (initialement en M_3 et M_4 respectivement) pour que la balançoire penche de l'autre côté ?

Exercice 7** : Gravity ($\sim$ 5 points)

FIGURE 5 – Source : Gravity.

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la Terre est $R_T = 6400$ km, G est la constante universelle de gravitation. On suppose que les astronautes ne sont soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre. On utilisera les coordonnées polaires (r,θ) pour repérer la position des astronautes. On note $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{u}_r \wedge \overrightarrow{u}_\theta$.

1/ Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation. On choisira pour condition aux limites $E_p(+\infty) = 0$.

2/ On suppose que l'astronaute a une orbite circulaire autour de la Terre. En utilisant le principe fondamental de la dynamique,

a. Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.

b. Calculer l'expression de la norme du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$, en fonction de M_0, G, m et R.

c. Calculer l'énergie mécanique de l'astronaute.

d. Calculer le travail de la force de gravitation lors d'un déplacement $rd\theta$ le long de l'orbite circulaire.

e. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique. Celle-ci varie-t-elle ici ?

3/ Que vaut le moment de la force de gravitation par rapport au centre O de la Terre ?

4/ Soit $\overrightarrow{L}$ le moment cinétique de l'astronaute par rapport à O. Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{L}$ dans la base $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{k})$ en fonction de m, r et $\omega = \dot{\theta}$.

5/ Énoncer le théorème du moment cinétique et montrer que la trajectoire d'un astronaute est plane.

6/ Établir la troisième loi de Kepler : la période T de l'orbite et le rayon R de l'orbite de l'astronaute sont reliées par : $T^2/R^3 = C$. Établir l'expression de la constante C en fonction des données du problème.

7/ Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97$ min. En déduire numériquement la vitesse du télescope Hubble v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

8/ Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur lorbite de l'ISS. Pour une orbite elliptique, on peut montrer que l'énergie mécanique de l'astronaute vaut

$$E_m = -\frac{mM_0G}{(R_S + R_H)}. \qquad (1)$$

(a) Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H, T_H et r_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de r_S, T_S et r_H. Calculer les valeurs numériques. Techniquement, comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?

(b) Quelle est la durée de ce voyage ? Pour cela, on se souviendra que la troisième loi de Kepler est valable aussi pour des orbites elliptiques avec R le demi-grand axe de l'ellipse.

Exercice 8** : Chute d'un arbre ($\sim$ 2 points)

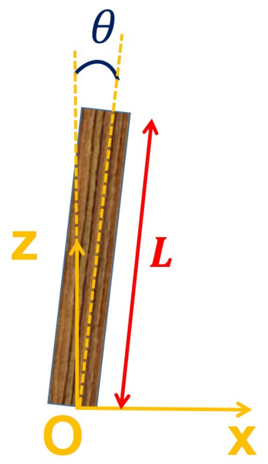

Figure 6 – Modélisation de la chute d'un arbre.

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse totale m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point dappui O au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe (ne glisse pas) et on repère la position de larbre par langle θ qu'il fait avec la verticale (figure 6). A $t = 0$, larbre fait un angle $\theta_0 = 5^o$ avec la verticale et est immobile. On négligera les frottements.

1/ Quelle est la masse linéique (par unité de longueur) de l'arbre ?

2/ En intégrant les contributions des masses élémentaires, établir que le moment d'inertie de l'arbre par rapport à O vaut $I = mL^2/3$.

3/ Montrer que la vitesse angulaire de l'arbre lorsqu'il tombe s'exprime :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}. \qquad (2)$$

On pourra multiplier l'équation différentielle obtenue de part et d'autre par $\dot{\theta}$ avant d'intégrer.

4/ Déterminer le temps de chute d'un arbre de $L = 30$ m. On donne, pour $\theta_0 = 5^o$:

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} = 5,1. \qquad (3)$$