Institut Villebon Georges Charpak - L2

# Principales équations différentielles en physique

## 1 Equation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre

Les équations différentielles du 1$^{\text{er}}$ ordre sans second membre et à coefficients constants sont du type :

$$A\frac{df(x)}{dx} + Bf(x) = 0 \tag{1}$$

avec $A$ et $B$ connus. Les solutions sont du type :

$$f(x) = \alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{L}}. \tag{2}$$

Pour trouver l'expression de $L$, on remplace $f(x)$ par son expression (éq. 2) dans l'équation différentielle 1 :

$$\begin{aligned} -\frac{A\alpha}{L}\mathrm{e}^{-\frac{x}{L}} + B\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{L}} &= 0 \qquad (3) \\ \left(-\frac{A\alpha}{L} + B\alpha\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{L}} &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$L = \frac{A}{B}. \tag{5}$$

Ensuite, pour déterminer $f(x)$ complètement, il faut connaître $\alpha$ qui est donné par une condition aux limites. Par exemple, si $f(x = 0) = 2$, alors $\alpha = 2$.

**Exercice 1: Freinage**

Une voiture a une vitesse $v_0$ à $t = 0$. À partir de cet instant, elle coupe son moteur et est soumise à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$. Déterminer sa vitesse pour $t \geq 0$.

***Réponse :*** L'application du PFD projeté sur l'axe de déplacement de la voiture donne : $m\frac{dv}{dt} = -kv$. La solution de cette équation est $v(t) = \alpha \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = \frac{m}{k}$ donné par l'équation différentielle et $\alpha = v_0$ donné par la condition initiale.

## 2 Equation différentielle du $2^{\text{eme}}$ ordre

Les équations différentielles du $2^{\text{eme}}$ ordre sans second membre et à coefficients constants sont du type :

$$A\frac{d^2f(x)}{dx^2} + B\frac{df(x)}{dx} + Cf(x) = 0 \tag{6}$$

avec $A$, $B$ et $C$ connus. En physique, on a souvent le cas où $B = 0$, soit :

$$A\frac{d^2f(x)}{dx^2} + Cf(x) = 0 \tag{7}$$

Les solutions sont du type :

$$f(x) = \alpha\cos(kx) + \beta\sin(kx)\,. \tag{8}$$

Pour trouver l'expression de $k$, on remplace $f(x)$ par son expression (éq. 8) dans l'équation différentielle 7 :

$$-A\alpha k^2\cos(kx) - A\beta k^2\sin(kx) + C\alpha\cos(kx) + C\beta\sin(kx) = 0 \tag{9}$$

$$\left(-Ak^2 + C\right)(\alpha\cos(kx) + \beta\sin(kx)) = 0 \tag{10}$$

Ainsi, on a :

$$k = \pm\sqrt{\frac{C}{A}}. \tag{11}$$

Ensuite, pour déterminer $f(x)$ complètement, il faut connaître $\alpha$ et $\beta$ qui sont donnés par deux conditions aux limites. Par exemple, si $f(x=0) = 2$ et $\frac{df}{dx}(x=0) = 5$, alors $\alpha = 2$ et $\beta = \frac{5}{k}$.

**Exercice 2: Oscillateur harmonique**

Soit un ressort horizontal, de constante de raideur $k$, au bout duquel est attachée une masse $m$. Au repos, la masse $m$ est à une position $x = 0$. À $t = 0$, on lâche le ressort d'une position $x_0$ avec une vitesse nulle. Déterminer la position de la masse pour $t \geq 0$.

***Réponse :*** L'application du PFD projeté sur l'axe de déplacement de la masse donne : $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$. La solution de cette équation est $x(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$, avec $\omega = \frac{k}{m}$ donné par l'équation différentielle et $\alpha = x_0$ et $\beta = 0$ donnés par les conditions initiales.