

# Chapitre 6

## Equation de la chaleur

### Équation de la chaleur

En l'absence de source de chaleur et si la conductivité thermique est constante, on peut établir l'équation de la chaleur :

$$D_{th}\Delta T = D_{th} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.1)$$

où on définit le coefficient de diffusion thermique :

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c_V}. \quad (6.2)$$

★ Démonstration :

★ Attention : le symbole "Δ" de l'équation de la chaleur signifie ici le "laplacien" (voir chapitre 3 sur l'analyse vectorielle).

★ Attention (2) : ne pas confondre l'équation de la chaleur avec l'équation **de conservation** de la chaleur !

★ L'équation de la chaleur est une **équation de diffusion** (de la chaleur, ici) formellement (c'est-à-dire mathématiquement) analogue à l'équation de diffusion des particules, nous reviendrons sur ce point. Une équation de diffusion relie les dérivées (secondes) dans l'espace d'une quantité scalaire à la dérivée temporelle de la même quantité. Le coefficient de diffusion  $D_{th}$  a donc pour unité des  $m^2 \cdot s^{-1}$ .

★ Ainsi, par analyse dimensionnelle, le **temps caractéristique**  $\tau$  qu'il faut à la chaleur pour

diffuser sur une **longueur caractéristique**  $L$  est tel que :

$$D_{th} = \frac{L^2}{\tau} \quad (6.3)$$

★ Les équations de diffusion ne sont pas invariantes par renversement du temps. En d'autres termes, si on remplace  $t$  par  $-t$ , on n'obtient pas la même équation, mais leur opposé. C'est le signe que la diffusion est un **processus irréversible**.

★ Il faut retenir que **l'équation de la chaleur couple l'espace et le temps**. Autrement dit, l'évolution de la température dépend à la fois de où on est et à quel instant.

★ Dans le cadre de ce cours, on se limitera à des résolutions simples. Vous verrez une méthode générale de résolution des équations de diffusion dans le cours sur les ondes en L3.

### Illustration 3: Température du sol

Comme illustré figure 6.1, les variations journalières ou annuelles de la température de l'air à la surface de la terre se répercutent dans le sol par une température variable dans le temps et l'espace.

À une profondeur donnée, la température varie, mais avec un certain retard par rapport aux variations à la surface de la terre, le temps que l'onde thermique se propage dans le sol.

Par ailleurs, plus on est profond dans la terre, plus ces variations sont atténuées par l'inertie thermique de la terre (due à la capacité thermique).

En-dessous de 10 m, on peut considérer que la température du sol est quasiment constante tout au long de l'année et égale à  $T_{sol} \simeq \frac{T_{min} + T_{max}}{2}$ .

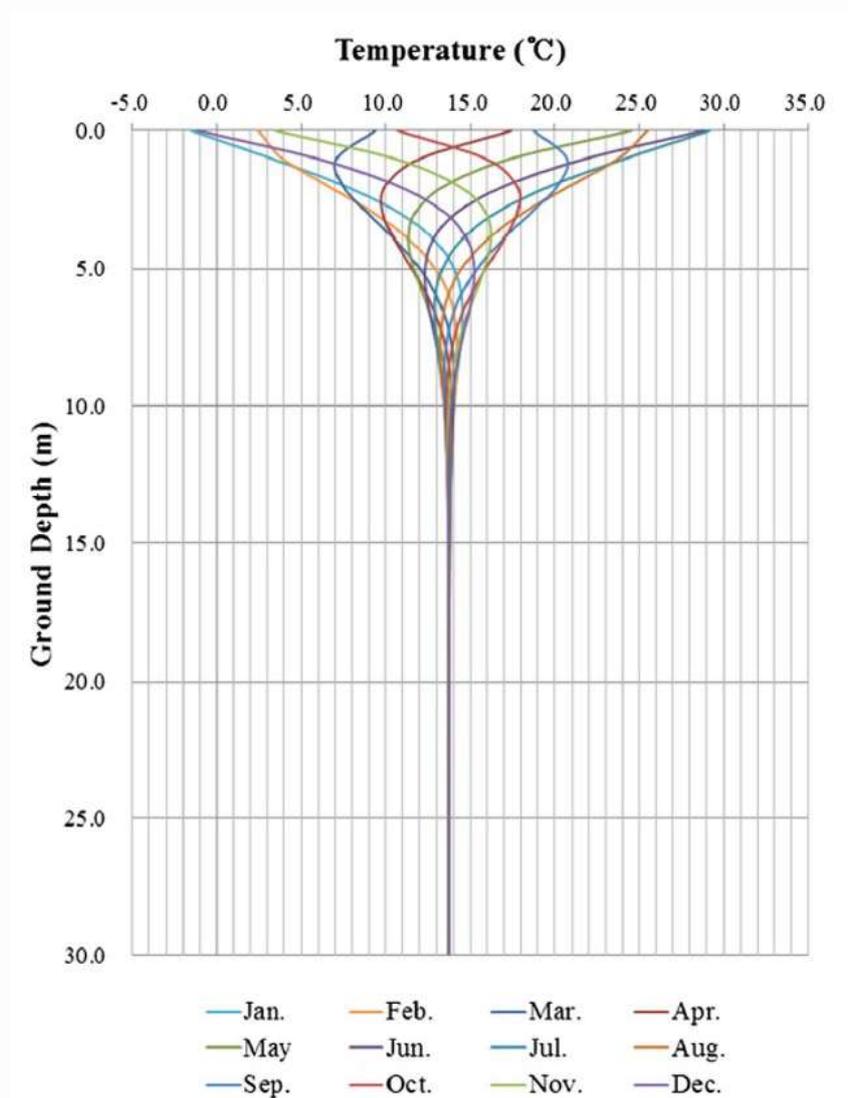
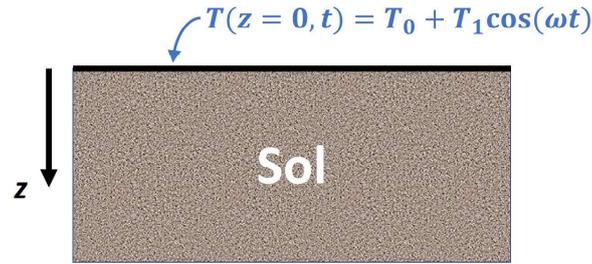


FIGURE 6.1 – Évolution de la température du sol en fonction de la profondeur pour les différents mois de l'année à Séoul (Corée du sud). Song et al. *Energy Sust. Dvlpt.* **23** 150 2014.

### Application du cours 5: Propagation de la chaleur dans le sol



Le demi-espace  $z > 0$  est un milieu de conductivité thermique  $\lambda$ , de capacité thermique  $c_V$  et de masse volumique  $\mu$ .  $z$  est dirigé vers le bas. Le demi-espace  $z > 0$  représente donc le sol. La température à la surface est de la forme :

$$T(z = 0, t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$$

1. Quelle est la valeur de  $\omega$  si on veut étudier les variations journalières de température ?
2. Quelle est la valeur de  $\omega$  si on veut étudier les variations annuelles de température ?
3. La valeur du coefficient de diffusion thermique du sol est d'environ  $D_{th} = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Estimer la longueur typique sur laquelle les variations de température journalières se propagent. Faire de même pour les variations annuelles.
4. Montrer que  $T(z, t) = T_0 + \alpha \exp^{-z/\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$  est une solution de l'équation de la chaleur. Exprimer  $\delta$  en fonction de  $D_{th}$  et  $\omega$ . Comparer  $\delta$  à la longueur caractéristique estimée à la question précédente.
5. Exprimer  $\alpha$  en fonction de  $T_1$ .
6. Comparer l'allure de  $T(z, t)$  à la figure 6.1.

**Réponse :** 1.  $\omega_j = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = 2.3 \times 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . 2.  $\omega_a = \frac{2\pi}{365 \text{ d}} = 2 \times 10^{-7} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . 3. On a  $L_j \approx D_{th} T_j \approx 30 \text{ cm}$  et  $L_a \approx D_{th} T_a \approx 5 \text{ m}$ . Les variations annuelles de température sont plus lentes mais pénètrent plus profond dans le sol. 4.  $\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ h}}$ . 5.  $\alpha = \frac{\delta}{T_1}$ .

### Application du cours 6: Propagation de la chaleur dans une barre



On considère une barre cylindrique homogène, de section  $S$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , de capacité thermique  $c_V$  et de masse volumique  $\mu$ . Les extrémités  $z = 0$  et  $z = L$  de la barre sont maintenues à la température  $T_0$  par contact avec un thermostat. À  $t = 0$ , on a :

$$T(z, t = 0) = T_0 + T_1 \sin \frac{\pi z}{L}$$

On pose :  $\theta(z, t) = T(z, t) - T_0$ .

1. Quelles sont les conditions aux limites  $\theta(z = 0, t)$  et  $\theta(z = L, t)$  ?
2. Compte tenu de ces conditions aux limites, on va chercher des solutions factorisées du type :  $\theta(z, t) = f(z)g(t)$ , que l'on appelle des **ondes stationnaires**. Déterminer les équations différentielles auxquelles obéissent  $f(z)$  et  $g(t)$ .
3. Déterminer  $f(z)$ .
4. Déterminer  $g(t)$ .
5. Exprimer le temps caractéristique du régime transitoire  $\tau$  en fonction de  $L$  et  $D_{th}$ .
6. Tracer  $T(z, t)$  pour : i. une position  $z$  donnée à tous les temps ; ii. un temps  $t$  donné dans toute la barre.

**Réponse :** 1.  $\theta(z = 0, t) = \theta(z = L, t) = 0$ . 2.  $D_{th} \theta'' = \gamma \theta$ . 3.  $f(z) = \sin \frac{\pi z}{L}$ . 4.  $g(t) = \exp(-t/\tau)$ . 5.  $\tau = \frac{L^2}{D_{th} \pi^2}$ .

# Chapitre 7

## Analogies avec d'autres phénomènes

Dans cette section, on va voir que la conduction thermique est analogue à d'autres phénomènes de transport.

### 7.1 Diffusion de particules

Le transport de particules est dû à une inhomogénéité de la concentration de particules  $n$ . On peut alors définir le vecteur de **densité de courant particulaire** :

$$\vec{j}_n = n \vec{v}, \quad (7.1)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse des particules. On a alors la **loi phénoménologique de Fick** qui relie la variation de  $n$  à  $\vec{j}_n$  :

$$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n, \quad (7.2)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion particulaire (en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ). Par ailleurs, l'**équation de conservation du nombre de particules** s'écrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_n. \quad (7.3)$$

Ainsi, on peut établir l'**équation de diffusion des particules** :

$$D \Delta n = \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (7.4)$$

On voit que l'on a formellement exactement les mêmes équations pour la diffusion de particules que pour la diffusion de la chaleur ! Les méthodes de résolution des problèmes sont donc les mêmes !

### 7.2 Conduction électrique

Le transport de charges électriques (ou conduction électrique) est dû à une inhomogénéité du potentiel électrostatique  $V$ . On peut alors définir le vecteur de **densité de courant de charges** :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (7.5)$$

où  $\rho$  est la densité volumique de charges  $q$  et  $\vec{v}$  leur vitesse. On a alors la **loi d'Ohm** qui relie  $V$  à  $\vec{j}$  :

$$\vec{j} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V = \sigma \vec{E}, \quad (7.6)$$

où  $\vec{E}$  est le champ électrique auquel sont soumises les charges et  $\sigma$  est la conductivité du milieu. L'équation de conservation de la charge s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (7.7)$$

Jusqu'ici, on a formellement exactement les mêmes équations pour la conduction électrique que pour la conduction thermique. La différence est que le potentiel électrostatique  $V$  n'est pas proportionnel à la densité de charges  $\rho$  (contrairement à la diffusion de la chaleur ou de particules), **ce qui ne permet pas d'écrire une équation de diffusion de la charge** comme précédemment.

### 7.3 Retour sur la conduction de la chaleur

Ces analogies sont particulièrement utiles pour se forger une intuition de ce qui se passe lors de la conduction thermique. Par exemple on peut définir le flux thermique et la conductivité thermique de manière analogue à ce que l'on fait pour le transport de charge.

#### Définition

Le **flux thermique**  $\phi$  à travers une surface orientée  $\vec{dS}$  est tel que :

$$\phi = \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS}.$$

C'est l'analogie de l'intensité électrique qui est définie par  $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$ .

La **conductivité thermique**  $\lambda$  est l'analogie de la conductivité électrique  $\sigma$ . On peut donc définir une **résistance thermique** :

$$R_{th} = \frac{e}{S\lambda} \quad (7.8)$$

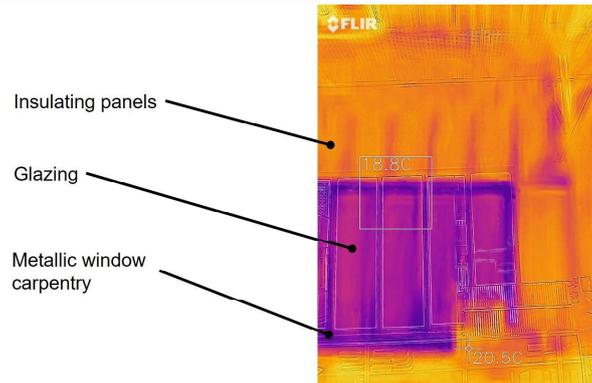
où  $e$  est l'épaisseur du matériau à travers lequel il y a conduction thermique, et  $S$  est sa section. Les résistances thermiques sont exprimées en  $\text{K.W}^{-1}$ . On utilise souvent la résistance thermique par carré :

$$R_{th}^{\square} = \frac{e}{\lambda} = \frac{1}{U}, \quad (7.9)$$

qui correspond à la résistance thermique par unité de section (c'est-à-dire avec  $S = 1$  dans l'équation 7.8).  $R_{th}^{\square}$  est en  $\text{K.m}^2.\text{W}^{-1}$  et  $U$  est appelé le **coefficient thermique** ou **valeur U** (en  $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$ ). Ces notations sont particulièrement utiles dans le domaine de la construction.

**Illustration 4: Caméras thermiques**

Les caméras thermiques mesurent le rayonnement infrarouge émis par les objets. La figure ci-dessous montre un exemple d'image infrarouge, où on voit la superposition de l'image visible (lignes grises) avec l'image IR codées en fausse couleur (chaque couleur correspond à une température de rayonnement différente). On voit un mur et une fenêtre (en bleu) en hiver. Comme on peut le voir, le cadre métallique de la fenêtre conduit le froid, ce qui est à l'origine de pertes thermiques. On peut aussi voir les bordures des panneaux d'isolation du mur : les jonctions ne sont pas optimales et font des ponts thermiques qui sont aussi responsables de pertes de chaleur.



### Le cours en exemples 25: Conductivité thermique de matériaux de construction

La figure 7.1 donne des valeurs de  $\lambda$  pour des matériaux de construction typiques. Calculer l'épaisseur de matériau que l'on doit avoir pour obtenir  $R_{th} = 1 \text{ K.m}^2.\text{W}^{-1}$ , pour une section de  $1 \text{ m}^2$ , pour :

1. des briques,
2. du béton renforcé,
3. du verre,
4. de la mousse de polyuréthane rigide.

Materials	Thermal conductivity (W/m.K)	Density (kg/m <sup>3</sup> )
Brick Veneer	0.80	1700
Re-inforced concrete	0.50	1400
Timber	0.15	650
Single glass window	0.65	2500
External rendering	0.25	1300
Tile concrete	0.84	1900
Cast concrete slab	1.13	2200
Expanded polystyrene	0.034	24
Polyurethane rigid foam	0.023	32
Sisalation foil	0.035	25
Plasterboard	0.25	950

FIGURE 7.1 – Valeurs de la conductivité thermique et de la densité pour des matériaux usuels de construction. Source : Aldawi *Proc. Eng.* **56** 661 2013.

**Réponse :** 1.  $e=80$  cm pour les briques. 2.  $e=50$  cm pour le béton renforcé. 3.  $e=65$  cm pour le verre. 4.  $e=2.3$  cm pour la mousse de polyuréthane rigide. Ceci montre à quel point la mousse de polyuréthane est un bon isolant.

### Application du cours 7: Conductivité thermique d'une fenêtre

L'analogie électrique est souvent utile pour analyser des arrangements complexes de matériaux en termes de résistances en parallèle ou en série. Déterminer l'assemblage équivalent de résistances des deux exemples de la figure 7.2.

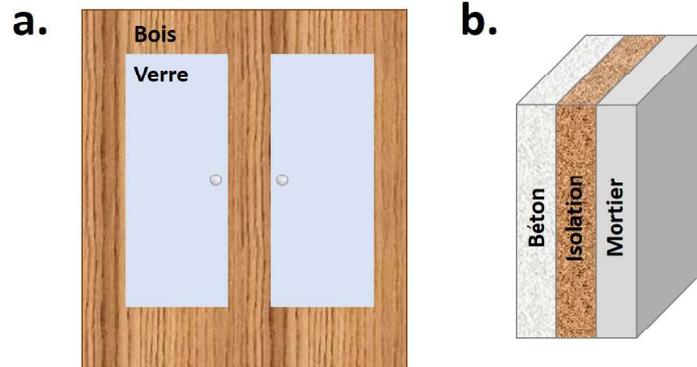


FIGURE 7.2 – Exemples de résistances thermiques.

*Réponse :* a. Deux résistances en parallèle. b. 3 résistances en série.

## 7.4 Bilan

Il est utile d'appliquer la notion de conservation au cours du temps et dans l'espace à des quantités très variées : évolution du nombre de particules, d'écoulement d'eau dans un tuyau, de chaleur dans un radiateur, de charges dans un semiconducteur, de population dans le métro, etc. On appelle cette généralisation la notion de bilan d'une quantité dans un système, outre les équations de conservation, cette notion fait également appelle aux notions de transport (flux de particules, de chaleur) et de diffusion (échange suivant un gradient). Pour faire un bilan il nous faut d'abord définir la notion de système.

### 7.4.1 Notion de système

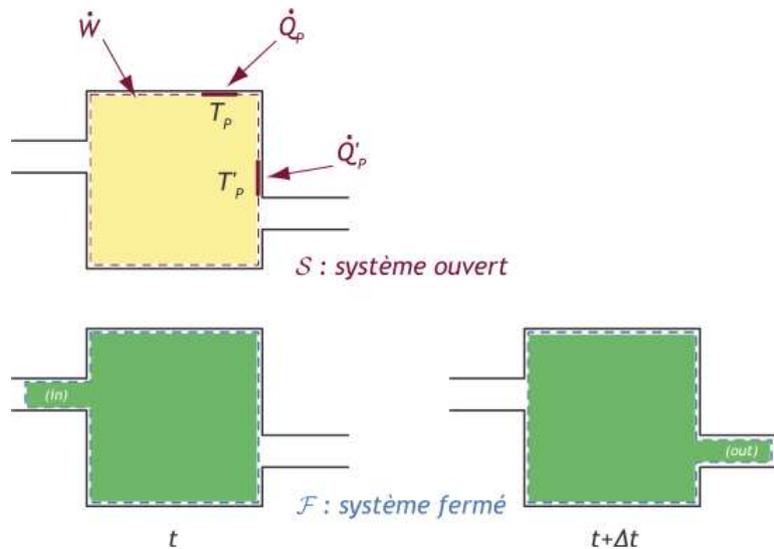


FIGURE 7.3 – Illustration de la différence entre un système ouvert et un système fermé. Crédit : Jacques Schwartzentruber.

#### Définition

On appelle **système**, noté  $\Sigma$  une portion d'espace délimitée par une frontière. Il existe deux types de système :

- un **système fermé** est un système clos ne permettant pas l'échange de matière entre l'intérieur et l'extérieur de ses frontières (échange d'énergie ou d'information possible). Ex : un ballon de baudruche gonflé, le système de refroidissement d'un réfrigérateur, une portion de rivière suivant la vitesse de l'eau.
- un **système ouvert** est un système autorisant l'échange de matière entre l'intérieur et l'extérieur (ainsi que les échanges d'énergies et d'information a priori). Ex : le boulevard périphérique, la portion de l'Yvette se situant sur la commune d'Orsay, le fil d'une ampoule.

La figure 7.3 illustre un système fermé et un système ouvert.

Il est important de comprendre qu'un même problème peut être traité en définissant un système fermé ou un système ouvert. Par exemple si l'on s'intéresse à l'écoulement d'un fluide dans un tuyau, en fonction du problème, il peut être plus intéressant de définir le système ouvert : une portion fixe de tuyau ( $\Sigma$  constant, localisé et inamovible) avec une quantité de fluide variable entrant et sortant du tuyau, ou fermé : suivre au cours du temps le même élément de fluide dans le tuyau et donc de faire bouger le système ( $\Sigma = \Sigma(t)$ ) au cours du temps comme illustré sur l'image 7.3.

### 7.4.2 Lois de diffusion

**La loi de Fourier** , que vous avez déjà vu, est une loi de diffusion décrivant les échanges de chaleur :

$$\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla}(T) \quad (7.10)$$

avec  $\vec{j}$  la densité de flux thermique ( $W.m^{-2}$ ),  $T$  la distribution de la température dans l'espace ( $K$ ) et  $\lambda$  la conductivité thermique ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ ).

**La loi de Fick** est une loi de diffusion décrivant l'évolution d'un flux de particules :

$$\vec{j}_N = -D \vec{\nabla}(\rho) \quad (7.11)$$

avec  $\vec{j}_N$  le flux de matière ( $m^{-2}.s^{-1}$ ),  $D$  le coefficient de diffusion ( $m^2.s^{-1}$ ) et  $\rho$  la densité de particule ( $m^{-3}$ ) .

**La loi de Darcy** est une loi de diffusion décrivant l'évolution du débit d'un fluide incompressible dans un milieu poreux :

$$\vec{q} = -KA \vec{\nabla}(H) \quad (7.12)$$

avec  $\vec{q}$  le débit du fluide ( $m^3.s^{-1}$ ),  $K$  le coefficient de diffusion ( $m^2.s^{-1}$ ),  $A$  la surface de contact ( $m^2$ ) et  $H$  la charge hydraulique (homogène à une longueur  $m$ ).

### 7.4.3 Bilan dans un système

La notion de bilan s'intéresse donc à l'évolution d'une quantité, ici notée  $N$ , dans un système  $\Sigma(t)$ . On se penchera ici sur l'évolution d'un nombre de particule mais cela se généralise à d'autres grandeur physique (fluide, chaleur, etc). Soit  $N_{\Sigma}(t)$  la quantité totale de particules au cours du temps dans le système  $\Sigma(t)$  et  $\rho_n(x, y, z, t)$  la densité de particules (en  $m^{-3}$ ) au point  $M(x,y,z)$  et à l'instant  $t$ . Alors :

$$N_{\Sigma_0}(t) = \iiint_{\Sigma_0} \rho_n(x, y, z, t) dx dy dz \quad (7.13)$$

Maintenant pour évaluer l'évolution de  $N_{\Sigma}(t)$ , il nous faut définir un système.

**Système ouvert** Soit  $\Sigma_0$  ouvert, fixe, indéformable, et intéressons nous à l'évolution du nombre de particules dans ce volume (ouvert = flux de matière autorisé). L'évolution du nombre de particules au cours du temps est donc simplement (simple car  $\Sigma_0$  fixe donc  $dx, dy$  et  $dz$  ne dépendent pas de  $dt$ !) :

$$\frac{dN_{\Sigma_0}(t)}{dt} = \iiint_{\Sigma_0} \frac{\partial \rho_n(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz \quad (7.14)$$

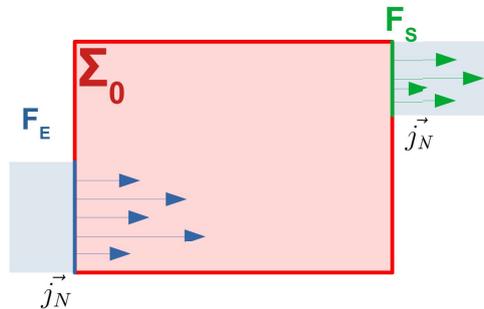


FIGURE 7.4 – Illustration du bilan de particules dans un système ouvert  $\Sigma_0$ .

Il s'agit maintenant de comprendre ce qu'est cette évolution. Il s'agit de flux entrant et sortant de particules. On définit donc  $\vec{j}_N(x, y, z, t)$  dans tout l'espace comme la densité de courant de particules. Il s'exprime en  $m^{-2}.s^{-1}$  et on a  $\vec{j}_N = \rho_n \times \vec{v}$  avec  $\vec{v}$  la vitesse des particules. Ainsi, le flux de particule  $\phi_i$  sur une surface  $S_i$  est par définition le nombre de ces particules

traversant la surface orientée par  $\vec{n}_S$  pendant un temps  $dt$ . Soit le nombre de particules étant compris dans le tube  $\vec{v} \cdot \vec{n}_S \times dt \times dS$ . Autrement dit :

$$\phi_i = \iint_{S_i} \rho_n(\vec{v} \cdot \vec{n}_S \times dt \times dS) = \iint_{S_i} \vec{j}_N \cdot \vec{n}_S dS dt \quad (7.15)$$

Ces particules entrent par une surface notée  $F_E$  et sortent par la surface  $F_S$ . La variation  $dN_{\Sigma}(t)$  au cours d'un intervalle de temps  $dt$ , peut également être comprise comme étant la différence entre le nombre de particules entrantes ( $\vec{j}_N \cdot \vec{n}_E$  avec  $\vec{n}_E$  le vecteur normal à la surface  $F_E$ ) et le nombre de particules sortantes du système ( $\vec{j}_N \cdot \vec{n}_S$  avec  $\vec{n}_S$  le vecteur normal à la surface  $F_S$ ). Ainsi :

$$dN_{\Sigma_0}(t) = \phi_N(t)dt \quad \text{avec} \quad \phi_N = \vec{j}_N(F_E) \cdot \vec{n}_E - \vec{j}_N(F_S) \cdot \vec{n}_S \quad (7.16)$$

soit finalement

$$\frac{dN_{\Sigma_0}(t)}{dt} = \phi_N(t) = \vec{j}_N(F_E) \cdot \vec{n}_E - \vec{j}_N(F_S) \cdot \vec{n}_S \quad (7.17)$$

On peut généraliser cette idée à l'ensemble des sorties et entrées de particules dans le système  $\Sigma_0$ . Il s'agit donc de sommer algébriquement les flux entrants et sortants de  $\Sigma_0$  sur l'ensemble de la surface du système noté  $S$ , avec  $\vec{n}_S$  le vecteur normal à la surface.

$$\phi_N(t) = \oiint_S \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS \quad (7.18)$$

Or d'après le théorème de Green-Ostrogradski, le bilan de flux entrant/sortant, peut se réécrire comme la divergence du courant dans tout le volume.

$$\oiint_S \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS = \iiint_{\Sigma_0} \text{div}(\vec{j}_N(x, y, z, t)) dx dy dz \quad (7.19)$$

Donc finalement on a :

$$\iiint_{\Sigma_0} \frac{\partial \rho_n(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz = \iiint_{\Sigma_0} \text{div}(\vec{j}_N(x, y, z, t)) dx dy dz \quad (7.20)$$

En simplifiant l'écriture on obtient l'équation de conservation :

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \text{div}(\vec{j}_N) \quad (7.21)$$

Cette équation de conservation se généralise à beaucoup de quantité, y compris thermodynamique, comme la chaleur, que vous avez vu dans un chapitre précédent.

**Dans un système fermé** Dans un système fermé noté  $\Sigma_f(t)$ , on suit au cours du temps les mêmes particules. C'est le volume qu'on adapte. Cela dit on cherche toujours la même chose, le nombre de particules dans  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_f(t)$  est une façon d'y parvenir.

$$N_{\Sigma_f}(t) = N_{\Sigma_0}(t) + \delta_E \quad (7.22)$$

$$N_{\Sigma_f}(t + dt) = N_{\Sigma_0}(t + dt) + \delta_S \quad (7.23)$$

Or le système étant fermé, il n'y a pas d'échange de matière avec l'extérieur. Donc :

$$N_{\Sigma_f}(t) = N_{\Sigma_f}(t + dt) \quad (7.24)$$

$$\Leftrightarrow N_{\Sigma_0}(t) + \delta_E = N_{\Sigma_0}(t + dt) + \delta_S \quad (7.25)$$

$$N_{\Sigma_0}(t + dt) - N_{\Sigma_0}(t) = \delta_E - \delta_S \quad (7.26)$$

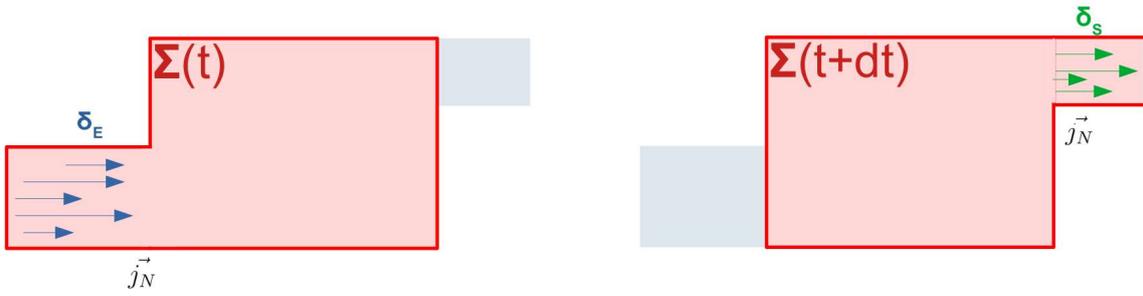


FIGURE 7.5 – Illustration du bilan de particules dans un système fermé

Et donc on a :

$$\frac{dN_{\Sigma_0}(t)}{dt} = \frac{\delta_E - \delta_S}{dt} \quad (7.27)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on sait que le nombre de particules dans  $\delta_E$  est la somme des particules étant présentes dans le tube de surface  $dS$  et de profondeur  $\vec{v} \cdot \vec{e}_x \times dt$ . De même pour  $\delta_S$ . Il est clair que si  $\delta_E$  est positif alors  $\delta_S$  est négatif puisque  $\vec{e}_x$  ne change pas de sens. D'où le signe opposé entre  $\delta_E$  et  $\delta_S$ .

$$\delta_E = \iint \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS dt \quad \text{et} \quad \delta_S = \iint \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS dt. \quad (7.28)$$

On retrouve bien

$$\frac{dN_{\Sigma_0}(t)}{dt} = \oiint_S \vec{j}_N(x, y, z, t) \cdot \vec{n}_S dS \quad (7.29)$$

et donc finalement, via Green-Ostrogradski, l'équation de conservation :

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \text{div}(\vec{j}_N) \quad (7.30)$$