Travaux Dirigés - Feuille n° 2 - Révisions

Exercice 1: Pression au fond d'une piscine

Une piscine olympique a une profondeur de 3 m. Quelle est la pression au fond de la piscine, sachant que la pression atmosphérique est de $1{,}013.10^5$ Pa et que la masse volumique de l'eau vaut $\rho = 1000$ kg.m^{-3} ?

Réponse : $P = P_0 + \rho g z = 1.307 \times 10^5$ Pa.

Exercice 2: Torricelli

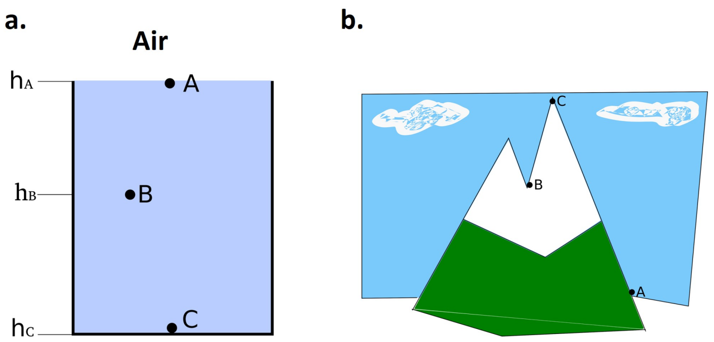


FIGURE 1 – a. Château d'eau. b. Montagne.

1. Considérons le château d'eau ouvert à son extrémité supérieure à la pression atmosphérique (P_{atm} = 1.01 bar = 101 kPa) comme illusté figure 1. Estimer la pression P en A, B et C à la fois en atm et en bar, avec (h_A, h_B, h_C) = (100 m, 60 m, 0 m).
2. La pression dans l'air, contrairement à dans l'eau, dépend de l'altitude parce que l'air est compressible. Nous supposerons que la température est constante dans l'air à 20°C et que $P(h) = P_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$. R est la constante des gaz parfait, T est la température (attention aux unités !), M est la masse molaire de l'air ($M = 29$ g.mol^{-1}) et g l'accélération de la gravité. Montrer que $\frac{Mg}{RT}$ est homogène à des m^{-1}.
3. Estimer la pression en A, B et C avec (h_A, h_B, h_C) = (0 m, 1200 m, 2000 m) comme illustré figure 1.b.

Réponse : 1. $P_A = P_{atm}$, $P_B = P_{atm} + \rho g(h_A - h_B)$, $P_C = P_{atm} + \rho g(h_A - h_C)$. 2. $\left[\frac{Mg}{RT}\right] = \frac{g.mol^{-1}.m.s^{-2}}{J.mol^{-1}} = \frac{g.m.s^{-2}}{J} = \frac{g.m.s^{-2}}{g.(m.s^{-1})^2} = m^{-1}$. 3. $P_A = P_{atm}$, $P_B = 0.869\ P_{atm}$, $P_C = 0.791\ P_{atm}$.

Exercice 3: Le crève-tonneau de Pascal

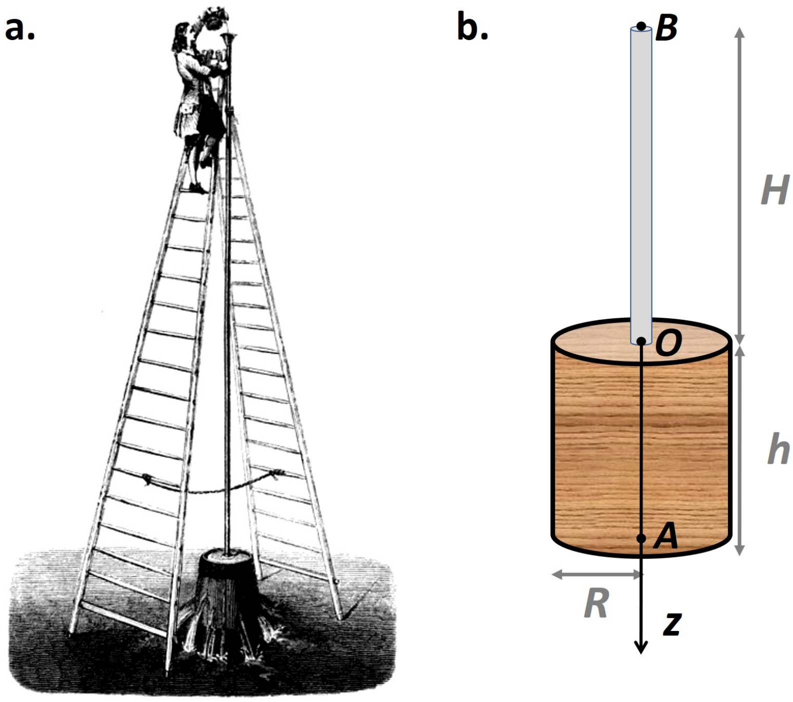


FIGURE 2 – a. Expérience du tonneau de Pascal. Tiré de *Les Forces de la nature*, d'Amédée Guillemin. b. Modélisation de l'expérience.

Le crève-tonneau de Pascal est une expérience hydrostatique réalisée par Blaise Pascal en 1646. Dans cette expérience Pascal montre que l'augmentation de la pression peut, si ce n'est faire exploser le tonneau, le faire fuir en faisant écarter ses planches qui le composent.
Pour cela, Pascal a percé la face supérieure du tonneau d'un trou pour y fixer un tube soigneusement étanché de diamètre intérieur $d = 5$ mm et de $H = 10$ m de long. On considère le tonneau comme un récipient cylindrique de rayon R et de hauteur $h = 1$ m. On suppose que l'ensemble est à la pression atmosphérique $p_0 = 10^5$ Pa (on néglige les variations de pression de l'air avec l'altitude). On oriente l'axe vertical vers le bas et on choisit $z = 0$ à la base du tuyau vertical comme schématisé sur la figure 2 (b).

1. Pascal remplit, dans un premier temps, le tonneau d'eau, de masse volumique ρ, jusqu'à ras-bord. Le tuyau vertical est en revanche rempli d'air. On suppose que le tonneau est parfait, c'est-à-dire qu'il ne fuit pas et qu'il est indéformable.
   (a) Écrire l'équation de l'hydrostatique. En déduire l'expression de l'évolution de la pression $p(z)$ dans le tonneau.
   (b) Exprimer la force de pression résultante $F_{p,1}$ s'exerçant sur une latte rectangulaire du tonneau de longueur L et de largeur h située en A, au fond du tonneau.
2. Pascal ajoute de l'eau, de sorte que le niveau d'eau atteigne le sommet du tube vertical. L'eau est à l'air libre en $z = -H$.
   (a) Calculer le volume d'eau que Pascal a ajouté.
   (b) Exprimer $p(z)$ et déterminer l'expression de la nouvelle force de pression résultante $F_{p,2}$ s'exerçant sur la même latte rectangulaire.
   (c) Exprimer $\frac{F_{p,2}}{F_{p,1}}$ et faire l'application numérique. Que s'est-il passé ?

Cet exercice illustre le fait qu'un fluide transmet intégralement des pressions (c'est ce que l'on appelle le **théorème de Pascal**). Vous pouvez voir des videos de l'expérience sur internet : `https://www.dailymotion.com/video/x1mj25w` ou, plus artisanal, `https://www.youtube.com/watch?v=Xbqd30vRJUI`
Exercice tiré d'un examen de Phys-A311.

Réponse : 1.a. $p(z) = p(0) + \rho g z$. 1.b. $F_{p,1} = Lh(p(0) + \rho g z)$. 2.a. $v_{eau} = H(d/2)^2 = 1.96 \times 10^{-4}$ m^3. 2.b. $p(z) = p(0) + \rho g(z + H)$; $F_{p,2} = Lh(p(0) + \rho g(Z + H))$. 2.c. $\frac{F_{p,2}}{F_{p,1}} = \frac{p(0)+\rho g(h+H)}{p(0)+\rho g h} = 1.89$. : la colonne d'eau appuie sur l'eau contenue dans le tonneau.

Exercice 4: Archimède

Un élément E de volume ab^2 (a × b × b) et de densité ρ_E est immergé dans l'eau ($\rho_e = 997$ kg/m^3) et maintenu immobile.

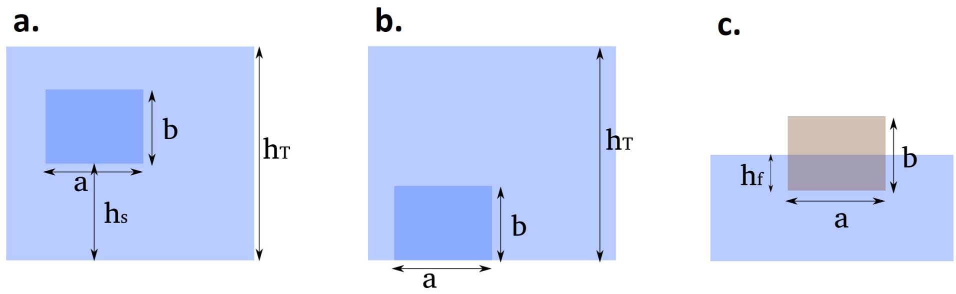


FIGURE 3 – a. Élément immergé. b. Élément touchant le fond. c. Élément flottant.

1. Décrire la force appliquée à E par le poids et la force d'Archimède. Déterminer la force d'Archimède.
2. Décrire les positions possibles de E en fonction de ρ_E.
3. Dans le cas de la figure 3.b, où E touche le fond, E ressent-il la poussée d'Archimède ? Pourquoi ?
4. Dans le cas de la figure 3.c, si h_f=0.4b, quelle est la valeur de ρ_E ?

Réponse : 1. $\overrightarrow{P} = \rho_E V \overrightarrow{g}$. $\overrightarrow{F}_A = -\rho_e V \overrightarrow{g}$ 2. Si $\rho_E > \rho_e$, l'objet coule. Si $\rho_E < \rho_e$, l'objet flotte. Si $\rho_e = \rho_E$, l'objet se maintient immergé, sans touché le fond. 3. E ne ressent pas la poussée d'Archimède, juste la force de pression de l'eau en direction de l'élément. 4. $\rho_E ab^2 g = \rho_e abh_f g$, d'où $\rho_E = \rho_e h_f / b = 0.4\rho_e = 400$ kg.m^{-3}.

Exercice 5: Pascal

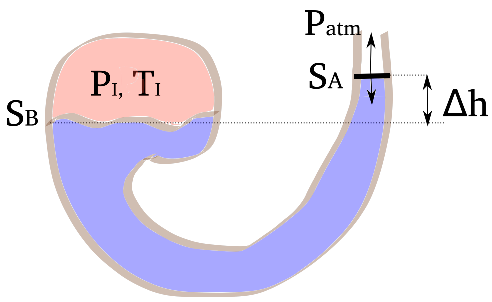


FIGURE 4 – Tube en U compliqué (toilettes).

Nous avons un tuyau rempli d'eau qui est relié d'un côté à un gaz de pression P_I et de l'autre côté à de l'air (P_{atm} = 1,013 bar = 101 kPa). On note la différence de pression entre le gaz et l'air Δp.

1. Considérez d'abord que P_I=P_{atm} et décrivez les forces exercées sur la surface de l'eau des deux côtés. Qu'est-ce que Δh dans ce cas ?
2. Maintenant, si P_I=2P_{atm}. Quel Δh s'établit ? La valeur dépend-elle de la surface de la section des colonnes d'eau de chaque côté ?
3. Maintenant, nous chauffons T_I à 80°C. Comment évolue la pression et Δh qualitativement ?

Réponse : 1. Si P_I=P_{atm}, nous avons Δh=0 d'après le principe de Pascal. 2. Nous avons besoin de conserver le débit du fluide qui signifie : $(h_0 - h_A)S_A = (h_B - h_0)S_B$. Nous savons aussi que : $\Delta p = \rho g \Delta h$. Nous savons que : $\Delta h = h_B - h_A = (h_0 - h_A)\frac{S_A}{S_B} + h_0 - h_A = h_0(1 + \frac{S_A}{S_B}) - h_A(1 + \frac{S_A}{S_B}) = (1 + \frac{S_A}{S_B})(h_0 - h_A)$. 3. En assimilant le gaz à un gaz parfait, $PV = nRT$. Le volume étant fixe, l'augmentation de la température de 20°C à 80°C entraîne une augmentation de la pression de 20% (attention, la température est exprimée en K dans l'équation.

Exercice 6: Entropie d'un gaz parfait

On considère un gaz parfait et on va établir les expressions de son entropie dans différents cas.

1. **En fonction de T et V -** Exprimer dS en fonction de dU et dV, puis en fonction de dT et dV en introduisant c_v supposé constant. En déduire l'expression de $S(T,V)$.
2. **En fonction de T et P -** Exprimer dS en fonction de dH et dP, puis en fonction de dT et dP en introduisant c_p supposé constant. En déduire l'expression de $S(T,P)$.
3. **En fonction de V et P -** Exprimer dS en fonction de dU et dV, puis en fonction de dV et dP en introduisant c_v supposé constant et le coefficient de Laplace γ. En déduire l'expression de $S(V,P)$.

Réponse : 1. $dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = nc_v\frac{dT}{T} + \frac{nRdV}{V}$. D'où $S(T,V) = nc_v \ln\frac{T}{T_0} + nR\ln\frac{V}{V_0} + S(T_0,V_0)$ où $S(T_0,V_0)$ est l'entropie d'un état de référence. 2. $dS = \frac{dH}{T} - \frac{VdP}{T} = nc_p\frac{dT}{T} - \frac{nRdP}{P}$. D'où $S(T,P) = nc_p \ln\frac{T}{T_0} - nR\ln\frac{P}{P_0} + S(T_0,P_0)$ où $S(T_0,P_0)$ est l'entropie d'un état de référence. 3. $dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = nc_v\frac{dT}{T} + \frac{nRdV}{V} = \frac{nc_v}{PV}(PdV + VdP) + \frac{nRdV}{V}$. D'où $dS = \left(\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V}\right)\frac{1}{nc_v}$. D'où $S(V,P) = nc_v \ln\frac{P}{P_0} + nc_p\ln\frac{V}{V_0} + S(V_0,P_0)$ où $S(V_0,P_0)$ est l'entropie d'un état de référence.

Exercice 7: Cycle Frigorifique

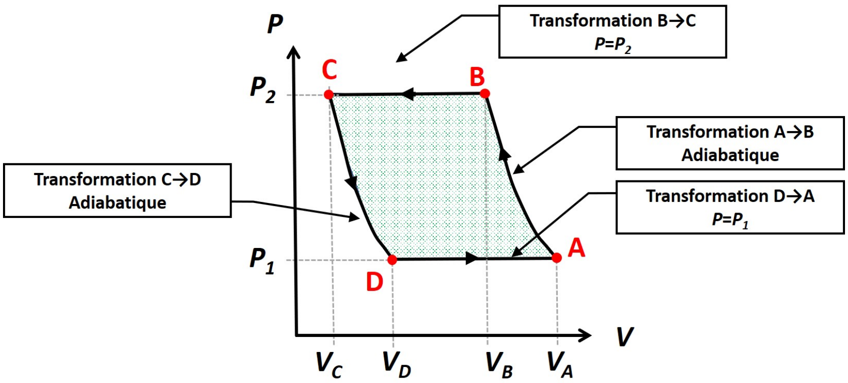


FIGURE 5 – Cycle frigorifique.

On considère un cycle frigorifique réversible sans changement d'état. On a un fluide qui décrit le cycle schématisé figure 5. Pendant la transformation isobare de B à C, le moteur échange une chaleur Q_c avec une source à la température T_c. Pendant la transformation isobare de D à A, le moteur échange une chaleur Q_f avec une source à la température T_f. Pour ce cycle, l'efficacité est définie comme $e = \frac{Q_f}{W}$: Q_f est la quantité de chaleur froide fournie par le frigo, et W est le travail que l'opérateur fournit au frigo pour qu'il marche.

1. Décrire les différentes transformations du cycle.
2. Déterminer la relation entre W, Q_f et Q_C.
3. Déterminer la relation entre Q_c, T_c, Q_f et T_f.
4. En déduire l'efficacité pour une machine réversible.

Réponse : 1. Transformations A à B et C à D : adiabatiques et réversibles, donc isentropiques. Transformation D à A détente isobare. Transformation de B à C compression isobare. 2. $\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0$. 3. $\Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$. 4. $e = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$.

Exercice 8: Étude thermodynamique d'un système ouvert

On considère un système ouvert $\mathcal{S}$ délimité par une surface fixe. $\mathcal{S}$ possède une entrée e et une sortie s. Il s'agit typiquement d'un tuyau d'entrée et d'un tuyau de sortie, mis en relation par un élément actif comme une turbine ou un milieu poreux.

On note $U(t)$ l'énergie interne de $\mathcal{S}$, $E_c(t)$ son énergie cinétique macroscopique, $S(t)$ son entropie et $M_S(t)$ sa masse. On se place en régime stationnaire, pour lequel ces grandeurs ne dépendent pas du temps t.

Les principes de la thermodynamique étant donnés pour des systèmes **fermés**, on se ramène à cette situation en suivant entre les dates t et $t+dt$ le système fermé constitué de :

- à l'instant t : du fluide contenu dans $\mathcal{S}$ et de la masse dm_1 qui va entrer dans $\mathcal{S}$ entre t et $t+dt$. Cette masse est à la pression p_1, la température T_1, et à l'altitude z_1. Elle possède un volume massique v_1, une vitesse c_1, une énergie interne massique u_1 et une entropie massique s_1.
- à l'instant $t+dt$: du fluide contenu dans $\mathcal{S}$ et de la masse dm_2 qui est sortie de $\mathcal{S}$ entre t et $t+dt$. Cette masse est à la pression p_2, la température T_2, et à l'altitude z_2. Elle possède un volume massique v_2, une vitesse c_2, une énergie interne massique u_2 et une entropie massique s_2.

Entre t et $t+dt$, $\mathcal{S}$ échange avec l'extérieur :

- La chaleur δQ avec un thermostat dont la température est T_S,
- Le travail δW_f dû aux forces de pression exercées par le fluide amont et aval,
- Le travail δW_g dû à la force de pesanteur,
- Le travail δW_S dû à l'élément actif. Ce travail peut être par exemple celui échangé avec les ailettes d'une turbine.

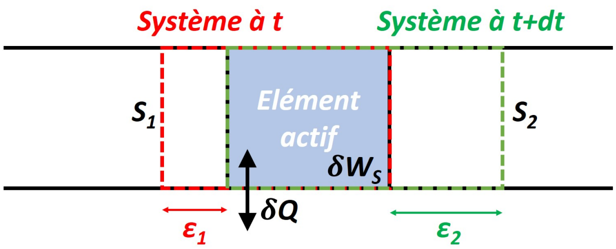


FIGURE 6 – Modélisation d'un système ouvert.

1. Écrire la conservation de la masse et en déduire une relation entre dm_1 et dm_2.
2. Calculer le travail des forces de pression amont et aval.
3. L'entrée et la sortie du système sont à la même altitude. Faire un bilan d'énergie pour établir que $\Delta e + \Delta h = w_S + q$ où e est l'énergie mécanique massique, h l'enthalpie massique, w_S le travail massique dû à l'élément actif et q la chaleur massique échangée.
4. Dans une détente de Joule-Thomson, on fait passer du gaz (que l'on supposera parfait) à travers un milieu poreux. Initialement, il est à la pression P_1 avant le milieu poreux, et passe à une pression $P_2 < P_1$ après. L'ensemble est dans une canalisation calorifugée et horizontale. Montrer qu'une telle détente est isenthalpique et irréversible. La détente de Joule-Thomson est utilisée dans les systèmes frigorifiques pour refroidir un gaz en le faisant passer par un milieu poreux pour en abaisser la pression.

FIGURE 7 – Détente de Joule-Thomson.

Réponse : 1. $M_S(t)+dm_1 = M_S(t+dt)+dm_2$. Comme on est en régime stationnaire $M_S(t) = M_S(t+dt)$, d'où $dm_1 = dm_2 = dm$. 2. $\delta W_f = p_1\delta V1 - p_2\delta V_2 = p_1 v_1 dm - p_2 v_2 dm$. 3. Le premier principe donne : $dU+dE = \delta W_S + \delta Q = p_1 v_1 dm - p_2 v_2 dm + w_S dm + q dm$. Or, $dU = U(t+dt) - U(t) = U_S + dmu_2 - U_S - dmu_1 = dm(u_2 - u_1) = dm\Delta u$. D'où $\Delta u + \delta e = p_1 v_1 - p_2 v_2 + w_S + q$, soit $\Delta h + \delta e = w_S + q$. 4. La canalisation est horizontale, donc $\delta W_g = 0$. Elle est calorifugée, donc $q = 0$. Il n'y a pas de travail effectué par le milieu poreux, donc $w_S = 0$. Donc $\Delta h = 0$: c'est une transformation isenthalpique. Par ailleurs $dh = 0 = TdS + VdP$. Comme $P2 < P_1$, $\Delta S = \Delta S_c > 0$ et la transformation est irréversible.

Exercice 9: Pompe à chaleur

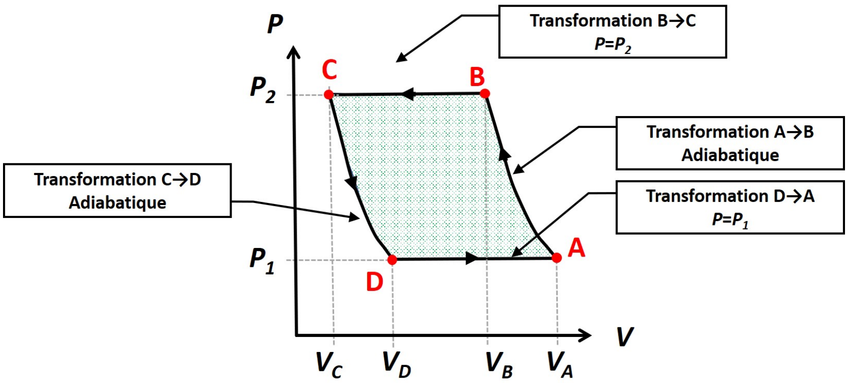


FIGURE 8 – Pompe à chaleur.

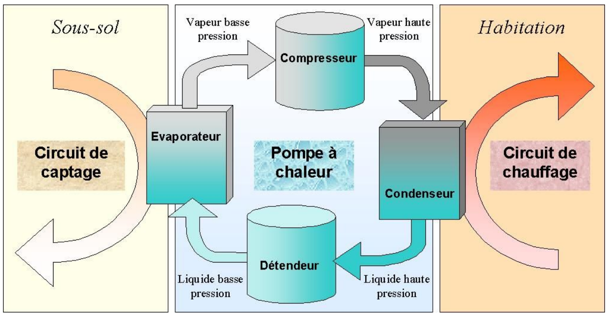
Une pompe à chaleur fonctionne sur le même principe qu'un réfrigérateur, mais avec un but différent : on veut prendre de la chaleur à une source froide et la transmettre à une source chaude. C'est un dispositif qui est couramment utilisé pour chauffer les maisons. On peut par exemple prendre une source froide qui est un lac à T_f =4°C pour chauffer une maison qui est à T_c =19°C.
On considère donc un cycle réversible sans changement d'état. On a un fluide qui décrit le cycle schématisé figure 8. Pendant la transformation isobare de B à C, le moteur échange une chaleur Q_f avec une source à la température T_f. Pendant la transformation isobare de D à A, le moteur échange une chaleur Q_c avec une source à la température T_c. Pour ce cycle, l'efficacité est définie comme $e = \frac{-Q_c}{W}$: Q_c est la quantité de chaleur froide fournie par le frigo, et W est le travail que l'opérateur fournit au frigo pour qu'il marche.

1. Décrire les différentes transformations du cycle.
2. Déterminer la relation entre W, Q_f et Q_C.
3. Déterminer la relation entre Q_c, T_c, Q_f et T_f.
4. En déduire l'efficacité pour une machine réversible. La calculer dans le cas de la pompe à chaleur chauffant la maison à partir du lac.

Réponse : 1. Transformations A à B et C à D : adiabatiques et réversibles, donc isentropiques. Transformation D à A détente isobare. Transformation de B à C compression isobare. 2. $\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0$. 3. $\Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$. 4. $e = \frac{-Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_c+Q_f} = \frac{T_c}{T_c-T_f} = \frac{292}{15} = 19.5$. C'est très efficace !!

Exercice 10: Pompe à chaleur diphasique

Dans cet exercice on imagine une température extérieure de 5°C et une température intérieure de 20°C. On considérera cette fois un changement d'état dans le fluide caloporteur, ici 1,1,1,2-tétrafluoroéthane, ou encore nommé R-134a.



Etats	1	2	2a	3a	3	4
Pression (bar)	3	10	10	10	10	3
Température (°C)	5	48	40	40	15	1
Volume (m^3/kg)	0,070	0,021	0,020	[redacted]	[redacted]	0,008
Enthalpie (kJ/kg)	400	425	410	258	220	220
Titre x	1,00	1,00	1,00	0	0	0,10

FIGURE 9 – Points de mesures réalisés d'après IPSA - Partiel Thermodyanmique 2019.

Description du cycle :

- 1 -> 2 : entrée dans le compresseur. Entrée du fluide à 5°C. Passage de 3,0 bars à 10,0 bars. Transformation isentropique.
- 2 -> 2a -> 3a -> 3 : entrée dans le condenseur et circulation dans la maison. La transformation est isobar (P=10 bar). Le fluide, d'abord gazeux à 48°C, chauffe la maison. Il sort à 15°C du condenseur.
- 3->4 : entrée dans le détendeur. Transformation isenthalpique. Le fluide est détendu (basse pression) et on a un début de vaporisation (donc production de froid).
- 4-> 1 : évaporateur. Transformation isobarique. Le fluide passe d'un état diphasique (liquide-gaz) à l'état gazeux. Cette évaporation refroidit le système. Le fluide va donc capter la chaleur environnante (à l'extérieur).

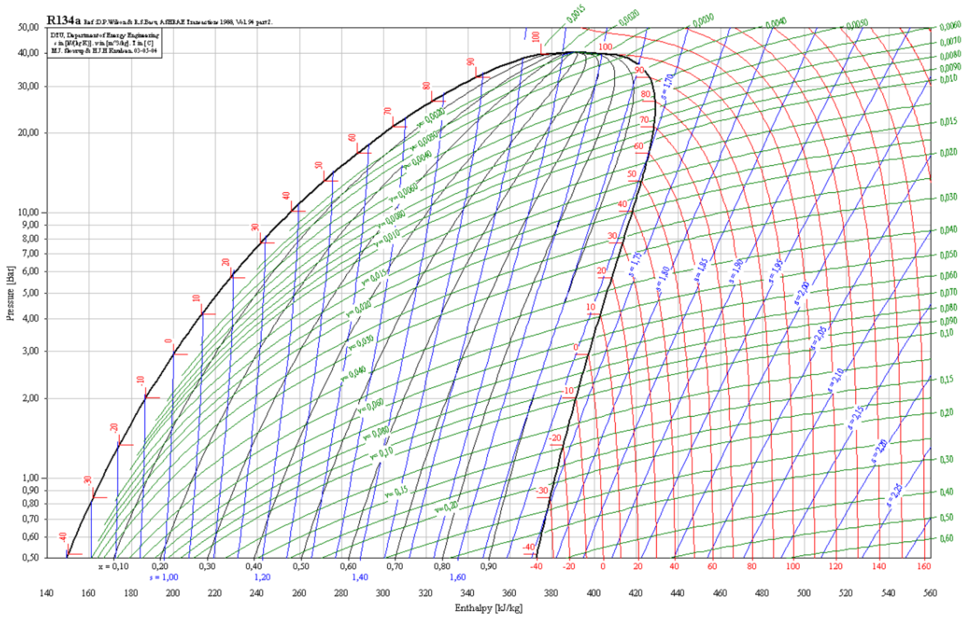


FIGURE 10 – (P,h) diagramme du R-134a. La courbe noire est la courbe d'ébullition et de rosée, avec le point critique au centre.

Exercice 11: Suite Pompe à chaleur diphasique

Répondre aux questions suivantes :

1. Placer les points du cycle donnés au tableau 9 sur le graphique 10 correspondant. Bien préciser l'état du fluide caloporteur (gazeux, liquide) à chaque étape.
2. En utilisant le premier principe, calculez la chaleur extraite de l'extérieur et ramenée à l'intérieur sachant que le débit massique du fluide caloporteur est de $0,3kg.s^{-1}$
3. Calculer l'efficacité de ce système.
4. Conclure quant à l'intérêt d'une telle machine.

Réponse :

1. Voir graphique ci-dessous.
2. D'après le premier principe $\Delta h = Q + W$. On a donc une lecture graphique immédiate de 3 variations d'enthalpie :

$$\Delta h_{12} = 25 \text{ kJ.kg}^{-1} \tag{1}$$
$$\Delta h_{23} = -205 \text{ kJ.kg}^{-1} \tag{2}$$
$$\Delta h_{41} = 180 \text{ kJ.kg}^{-1} \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Comme on connait le débit massique du fluide dans le système, on en déduit :

$$W_{\text{compresseur}} = 0,3 \times \Delta h_{12} = 7,5 \text{ kW} \tag{5}$$
$$Q_{\text{condenseur}} = 0,3 \times \Delta h_{23} = 61,5 \text{ kW} \tag{6}$$
$$Q_{\text{extérieur}} = 0,3 \times \Delta h_{41} = 54 \text{ kW} \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

L'énergie est conservée (ouf), et on a bien extrait de la chaleur de l'extérieur pour chauffer l'intérieur uniquement grâce à l'ajout d'un compresseur.

3. L'efficacité vaut toujours :

$$e = \frac{\text{gain en chaleur}}{\text{travail dépensé}} = \frac{205}{25} = 8,2$$