

Chapitre 5

Conduction thermique

Dans ce chapitre, nous allons détailler les processus de conduction thermique plus en détail.

5.1 Vecteur densité de flux de chaleur

Définition

Le **vecteur densité de flux de chaleur**, \vec{j}_Q , à travers un élément de surface \vec{dS} est tel que la chaleur traversant cette surface entre les instants t et $t + dt$ vaut :

$$\delta Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} dt. \quad (5.1)$$

\vec{j}_Q s'exprime en $\text{J.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$, c'est-à-dire en W.m^{-2} . \vec{dS} est parallèle à la normale sortante de la surface considérée.

★ Dans la suite, on fera l'hypothèse de l'**équilibre thermodynamique local**, c'est-à-dire que l'on suppose que l'on peut définir en tout point M et à tout instant t une température $T(M, t)$ et une énergie interne $u(M, t)$.

On peut établir une équation-bilan de la chaleur **en l'absence de sources**. Pour cela, on considère un fluide (ou un solide) de masse volumique μ dans un volume **fixe** V limité par la surface fermée Σ . On fait les hypothèses suivantes :

- Il n'y a pas de convection, de telle sorte à ce que l'énergie cinétique macroscopique du fluide est nulle.
- Il n'y a pas d'autres forces conservatives que les forces de pression.
- Le travail des forces de pression est nul ici car le volume V est constant.

On applique le premier principe au fluide contenu dans le volume V entre t et $t + dt$:

On peut également exprimer dU en fonction de la capacité thermique massique à volume constant c_v :

On finit par obtenir l'équation de conservation de la chaleur en l'absence de sources de chaleur :

$$\operatorname{div} \vec{j}_Q + \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

On peut généraliser cette équation dans le cas où on a des sources de chaleur dans le volume V :

Conservation de la chaleur

Si on appelle σ l'énergie interne reçue par unité de volume et par unité de temps autrement que par diffusion thermique (par ex. due à des sources de chaleur), l'équation de la chaleur devient :

$$\operatorname{div} \vec{j}_Q + \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma. \quad (5.3)$$

Point de math 1: Intégration sur une surface

Pour faire une intégration sur une surface (fermée ou pas), il faut :

1. exprimer \vec{dS} dans les coordonnées considérées :

$$\vec{dS} = dS \vec{n}$$

où dS est la surface élémentaire et \vec{n} la normale de la surface.

2. Faire le produit scalaire
3. Intégrer le résultat sur la surface considérée.

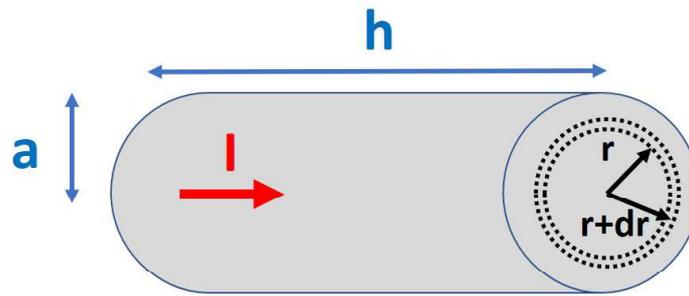
Exemple 1 : Intégrer sur une sphère $\vec{j}_Q = j_0 \vec{u}_r$.

$$\begin{aligned} \oiint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} &= \oiint j_0 \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{u}_r = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} j_0 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= j_0 r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = j_0 r^2 [-\cos \theta]_0^{\pi} [\varphi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi r^2 j_0. \end{aligned}$$

Exemple 2 : Soit un parallélépipède de longueur L suivant y et de hauteur h selon z , intégrer $\vec{j}_Q = j_0 \vec{u}_x + j_1 \vec{u}_y$ sur cette surface.

$$\begin{aligned} \iint \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} &= \iint (j_0 \vec{u}_x + j_1 \vec{u}_y) \cdot (dydz \vec{u}_x) = \iint j_0 \cdot dydz \\ &= j_0 \int_{y=0}^L dy \int_{z=0}^h dz = Lh j_0. \end{aligned}$$

Application du cours 4: Bilan thermique pour un câble cylindrique



On considère un câble cylindrique de rayon a , de résistivité ρ , de masse volumique μ , parcouru par un courant d'intensité I .

1. Déterminer la puissance volumique due à l'effet Joule.
2. Déterminer la quantité de chaleur diffusive qui traverse un cylindre de rayon r et de hauteur h pendant dt .
3. On considère le volume contenu entre les cylindres de rayon r et $r + dr$. Donner le bilan de chaleur diffusive.
4. Appliquer le premier principe pour le solide contenu entre les cylindres de rayon r et $r + dr$ et établir l'équation de la chaleur.

Réponse : 1. $\frac{dP}{dV} = \rho j^2$ où j est la densité volumique de courant. D'où $\frac{dP}{dV} = \frac{\rho I^2}{\pi^2 a^4} \cdot 2. \delta Q_{cv1} = jQ_{2\pi r h dt}$. 3. $\delta Q_{cv1} = -\frac{\partial}{\partial r}(jQ) 2\pi r h dr dt$. 4. $dU = \mu h 2\pi r dr dv \frac{dT}{dt} dt = \mu h 2\pi r dr dv \frac{dT}{dt} dt = \mu h 2\pi r dr dv \frac{dT}{dt} dt + \delta Q_{diffusif} + \delta Q_{Joule}$. D'où $\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r j Q) = \frac{\rho I^2}{\pi^2 a^4} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$.

5.2 Diffusion et loi de Fourier

5.2.1 Notion de diffusion

Définition

On appelle **diffusion** un transport menant à homogénéiser la distribution spatiale d'une quantité au sein d'un système. Les lois décrivant ces échanges sont historiquement phénoménologiques, et décrivent une proportionnalité entre le flux et le gradient de la distribution de la quantité observée.

5.2.2 Loi de Fourier

Définition

La **loi de Fourier** est une loi phénoménologique qui relie la densité de flux de chaleur au gradient de température, en introduisant la conductivité thermique $\lambda > 0$ (en $\text{J.K}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ou en $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$) :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (5.4)$$

★ La loi de Fourier met en équation le fait qu'une grande différence de température engendre un flux important de chaleur.

★ Cette loi n'est valable que lorsque les phénomènes considérés ne varient pas trop brutalement dans l'espace et dans le temps, ce qui sera toujours le cas dans le cadre de ce cours.

★ La conductivité thermique peut ne pas être homogène dans un solide ou un fluide donné, notamment si la température est inhomogène. Par exemple : l'air près d'un radiateur, une marmite que l'on vient de mettre sur le feu, etc...

★ **Ordres de grandeur** : $\lambda_{\text{Cuivre}} \simeq 400 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, $\lambda_{\text{Eau}} \simeq 1 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$; $\lambda_{\text{Air}} \simeq 0.01 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

5.3 Interprétation microscopique : le cas du gaz parfait monoatomique

Que signifie la température à l'échelle microscopique ? Peut-on faire un lien entre les molécules qui composent la matière et la température ?

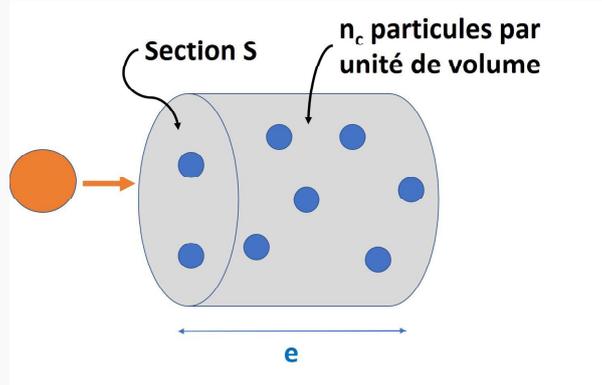
Définition

La **vitesse quadratique moyenne** v^* d'un gaz composé de molécules de masse m est telle :

$$\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_B T \quad (5.5)$$

★ On verra la démonstration de cette relation en TD.

Définition



Soit une particule incidente arrivant orthogonalement sur une cible fixe de section S , d'épaisseur e et contenant n_c particules par unité de volume.

La **section efficace de choc** σ est définie telle que la probabilité pour que la particule incidente ait un choc avec une des particules cibles est : $p_{\text{choc}} = \frac{\sigma}{S}$.

Le **libre parcours moyen** l correspond à la distance moyenne parcourue par la particule incidente entre deux chocs.

Le nombre de chocs que la particule incidente va avoir sur l'épaisseur e de la cible s'écrit :

On en déduit alors l'expression du libre parcours moyen :

Par ailleurs, si les molécules s'entrechoquent, cela signifie que la distance les séparant est inférieure à la somme de leur rayon, ce qui permet d'estimer la section efficace :

★ Pour un gaz parfait, les molécules sont supposées ponctuelles, et la section efficace de choc est nulle, et le libre parcours moyen infini, ce qui n'est pas physique. C'est l'une des limites du modèle !

Le cours en exemples 23: Libre parcours moyen dans un gaz dilué

Estimer le libre parcours moyen pour un gaz dilué.

Réponse : On a $l = \frac{n\sigma}{1} = \frac{n\sigma}{1} = \frac{\sigma}{1} = \frac{\sigma}{1}$. Avec $r \approx 10^{-10}$ m, $T \approx 300$ K et $P \approx 10^5$ Pa, on obtient $l \approx 10^{-7}$ m.

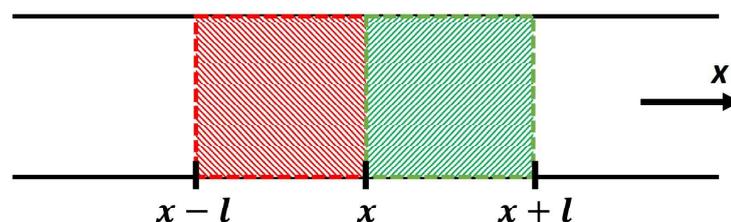
Le cours en exemples 24: Durée moyenne entre deux chocs

Estimer la durée moyenne entre deux chocs pour un gaz dilué.

Réponse : La vitesse du gaz vaut $v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$. Pour l'air, on a $v^* = 500$ m.s $^{-1}$ et $\tau = \frac{l}{v^*} \approx 10^{-10}$ s.

On peut trouver l'expression de la loi de Fourier et de la conductivité thermique pour un gaz parfait monoatomique. Pour cela, on va se limiter au cas quasi-1D, c'est-à-dire que la température est de la forme $T(x, t)$. On va faire les hypothèses suivantes :

- Toutes les molécules ont eu leur dernier choc à l'instant t .
- Les chocs redistribuent les vitesses des particules de manière aléatoire. La vitesse vaut, en **norme**, v^* . On estime que les particules ont 1/6 de chances d'avoir une vitesse suivant \vec{u}_x , 1/6 selon $-\vec{u}_x$, 1/6 selon \vec{u}_y , 1/6 selon $-\vec{u}_y$, 1/6 selon \vec{u}_z , et 1/6 selon $-\vec{u}_z$. C'est une simplification extrême qui respecte l'isotropie du système.
- Entre t et $t + dt$, les molécules ont un mouvement uniforme et parcourent une distance égale au libre parcours moyen l .
- Les vitesses moyennes v^* sont uniformes (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de x). C'est rigoureusement faux puisque v^* dépend de la température.
- La densité moléculaire est supposée uniforme. C'est rigoureusement faux puisque la densité dépend de la température.
- En revanche, l'énergie interne par molécule dépend de la position : $u = \frac{3}{2}k_B T(x)$.
- En l'absence d'apport extérieur, la seule forme d'énergie pour un gaz parfait monoatomique est son énergie cinétique.
- On considère une conduite de section S .



On va faire le bilan de chaleur amené par les molécules qui traversent l'abscisse x entre t et $t + dt$. Calculons tout d'abord le nombre de molécules qui vont passer de la droite vers la gauche (celles contenues dans le volume rouge) :

Celles-ci ont une énergie cinétique :

Puis le nombre de molécules qui vont passer de la gauche vers la droite (celles contenues dans le volume rouge) ont une énergie cinétique :

Ainsi, la quantité de chaleur qui traverse x pendant la durée dt vaut :

On vient donc d'établir la loi de Fourier pour un système quasi-1D, et la conductivité thermique pour un gaz parfait monoatomique vaut :

$$\lambda = \frac{1}{2}n_c k_B l v^* . \quad (5.6)$$

Pour de l'air à pression et température ambiantes, on trouve $\lambda \simeq 10^{-2} \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, en bon accord avec la valeur expérimentale.

★ Le modèle montre également que, pour un gaz parfait monoatomique, la conductivité thermique est indépendante de la pression :