**Institut Villebon Georges Charpak**

**Licence 2ème année**

**2024-2025**

# Thermodynamique

—

## Cours en autonomie

**Claire Marrache-Kikuchi**

Ce polycopié vise à ce que l'apprentissage du cours puisse se faire en autonomie. Pour cela, le cours est classifié suivant ce que vous devez savoir et/ou savoir faire :

- Les définitions et les lois sont à connaître.
- Les sections ***Le cours en exemples*** sont des extensions du cours. Il s'agit de vous faire découvrir une propriété ou des exemples que vous devez connaître. Ils font donc intégralement partie du cours. Les réponses sont données à la fin de l'exemple.
- Les sections ***Application du cours*** donnent des exercices d'application directe du cours. Vous devez pouvoir les faire sans difficulté, mais les résultats ne sont pas à connaître. Les réponses sont données à la fin de l'exercice.
- Enfin, les sections ***Savoir faire*** récapitulent ce que vous devez savoir faire, section par section.

Bien entendu, si vous avez des questions, vous pouvez toujours me contacter :

Claire Marrache-Kikuchi
IJCLab
Bat 108
01 69 15 48 58
claire.marrache@universite-paris-saclay.fr

# Chapitre 1

# Dérivées partielles

Ce chapitre a pour but de vous donner les bases nécessaires à l'utilisation des dérivées partielles en physique. Vous verrez des notations plus rigoureuses en math.

## 1.1 Définition d'une dérivée partielle

**Définition**

Soit $f$ une fonction de $n$ variables $(x_1, x_2, ...x_n)$ :

$$f \ : \ (x_1, x_2, ....x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ...x_n).$$

La dérivée partielle par rapport à la variable $x_i$ est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ...x_i + \Delta x_i, ...x_n) - f(x_1, x_2, ...x_i, ...x_n)}{\Delta x_i}.$$

⋆ Les règles usuelles de la dérivation s'appliquent pour les dérivées partielles.
⋆ Cela revient à faire la dérivée par rapport à $x_i$, en gardant toutes les autres variables constantes.

## 1.2 Différentielle totale

**Définition**

Soit $f$ une fonction de $n$ variables $(x_1, x_2, ...x_n)$ :

$$f \ : \ (x_1, x_2, ....x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ...x_n).$$

La différentielle totale de $f$ est définie par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

⋆ Ainsi, la différentielle totale est la somme des dérivées partielles que multiplie la petite variation de la variable considérée.
⋆ De la définition de la différentielle totale, on voit également que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée de $f$ par rapport à $x_i$ en gardant toutes les autres variables constantes.

## 1.3 Exemples

**Le cours en exemples 1: Calcul de dérivées partielles**

1. Soit $f(x, y) = 3x^2y^5 + 2$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Soit $f(x, y) = x^3 + y^2 + xy$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Soit $f(x, y, z) = 5x + y^2z + 36z$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.
4. Soit $f(T, P, V) = PV$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial T}$, $\frac{\partial f}{\partial P}$ et $\frac{\partial f}{\partial V}$.
5. Soit $f(T, P, V) = \frac{PV}{nRT}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial T}$, $\frac{\partial f}{\partial P}$ et $\frac{\partial f}{\partial V}$.

***Réponse :*** 1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^5$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 15x^2y^4$. 2. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$. 3. $\frac{\partial f}{\partial x} = 5$, puis $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 36$. 4. $\frac{\partial f}{\partial T} = 0$, puis $\frac{\partial f}{\partial P} = V$ et $\frac{\partial f}{\partial V} = P$. 5. $\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{PV}{nRT^2}$, puis $\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{V}{nRT}$ et $\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{P}{nRT}$.

**Le cours en exemples 2: Calcul de dérivées partielles**

Soit $f(x, y, z) = 3x + 5y^3 + zy + 2$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.
2. Déterminer la différentielle totale $df$.

***Réponse :*** 1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$, puis $\frac{\partial f}{\partial y} = 15y^2 + z$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = y$. 2. $df = 3dx + (15y^2 + z)\,dy + ydz$.

**Le cours en exemples 3: Capacités thermiques**

On a les identités thermodynamiques fondamentales :

$$\begin{aligned} dU &= TdS - PdV \\ dH &= TdS + VdP \end{aligned}$$

1. Calculer $\frac{\partial U}{\partial S}$, $\frac{\partial U}{\partial V}$, $\frac{\partial H}{\partial S}$ et $\frac{\partial H}{\partial P}$.
2. On considère un unique composé, sans changement d'état. Dans le cas d'une transformation réversible ($\delta S_c = 0$), exprimer $dU$ en fonction de $c_v$, $T$, $P$ et $V$.
3. Exprimer $c_v$ sous la forme d'une dérivée partielle de $U$, puis sous la forme d'une dérivée partielle de $S$.
4. De même, exprimer $c_p$ sous la forme d'une dérivée partielle de $H$, puis sous la forme d'une dérivée partielle de $S$.

***Réponse :*** 1. $\frac{\partial U}{\partial S} = T$, $\frac{\partial U}{\partial V} = -P$, $\frac{\partial H}{\partial S} = T$ et $\frac{\partial H}{\partial P} = V$. 2. $dU = TdS - PdV = \delta Q - PdV = c_v dT - PdV$. 3. Ainsi, $c_v = \left(\frac{\delta U}{\delta T}\right)_V = T\left(\frac{\delta S}{\delta T}\right)_V$. 4. De la même manière, $c_p = \left(\frac{\delta H}{\delta T}\right)_P = T\left(\frac{\delta S}{\delta T}\right)_P$.

# Chapitre 2

# Analyse vectorielle

Ce chapitre a pour but de vous donner les bases d'analyse vectorielle. Dans le cadre de ce cours, nous aurons essentiellement besoin du gradient, de la divergence et du Laplacien, mais je vous donne également la notation d'autres opérateurs qui peuvent vous être utiles. Je me restreindrai à l'expression des opérateurs en coordonnées cartésiennes. Naturellement, ils peuvent également s'exprimer en coordonnées cylindriques ou sphériques, mais je n'en donnerai pas l'expression ici.

## 2.1 Notion d'orientation

En physique, on raisonne souvent sur des espaces orientés. Il est donc important de bien comprendre ce que l'on entend par là.

### 2.1.1 Contour orienté

**Définition**

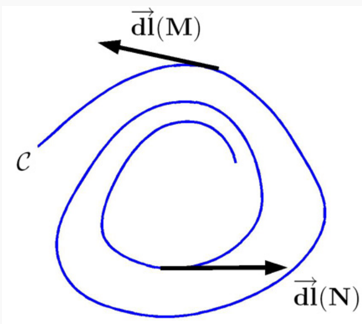



FIGURE 2.1 – Contour orienté par le vecteur **dl**.

Soit un contour $\mathcal{C}$. On dit que ce **contour est orienté** lorsque l'on définit un sens de parcours. Une portion de contour est alors orientée par un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{dl}}$ qui a pour norme $||\overrightarrow{\mathbf{dl}}||$, la longueur du contour considéré, et pour orientation la tangente à ce contour, parcourue dans le sens positif (figure 2.1).

### 2.1.2 Surface orientée

**Définition**


FIGURE 2.2 – Surface orientée par le vecteur **dS**.

Soit une surface $\mathcal{S}$. On dit que cette **surface est orientée** lorsque l'on oriente l'espace. Une portion de surface est alors orientée par un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{dS}}$ qui a pour norme $||\overrightarrow{\mathbf{dS}}||$, l'aire de la surface considérée, et pour orientation la normale à ce contour, orientée dans le sens positif (figure 2.2).

## 2.2 Opérateur Nabla

**Définition**

L'opérateur Nabla est un objet mathématique qui, dans un repère orthonormé cartésien, a pour coordonnées :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

⋆ L'opérateur Nabla est une notation pratique (quand on a l'habitude) pour écrire de manière compacte certaines équations. On n'est néanmoins pas obligé de l'utiliser !
⋆ On va voir dans la suite comment il s'utilise.

## 2.3 Gradient

**Définition**

Le **gradient** est un opérateur qui s'applique sur un **scalaire** $A$ pour **le transformer en vecteur**. En coordonnées cartésiennes, on a au point $M$ :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, A(M) = \vec{\nabla} A(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x}(M) \\ \\ \frac{\partial A}{\partial y}(M) \\ \\ \frac{\partial A}{\partial z}(M) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

⋆ Le gradient rend compte de la variation de la grandeur scalaire $A$ dans l'espace. Le gradient indique si $A$ varie pas, un peu ou beaucoup selon les 3 directions de l'espace.
⋆ Dans une direction, le gradient est un vecteur orienté dans la direction des $A$ croissants.

⋆ On voit que le gradient de $A$ peut s'exprimer comme une "multiplication" de l'opérateur nabla par $A$.

### Le cours en exemples 4: Calcul de gradients

Calculer le gradient des grandeurs scalaires suivantes :

1. $P(x) = 50x + 3$.
2. $T(x, y, z) = 5x + y^2 + 36z$.
3. $U(x, y, z) = -20z$.
4. $f(x, y, z) = 3x^2y^5 + 2$.

***Réponse :*** 1. $\overrightarrow{\text{grad}}P = 50\vec{u}_x$. 2. $\overrightarrow{\text{grad}}T = 5\vec{u}_x + 2y\vec{u}_y + 36\vec{u}_z$. 3. $\overrightarrow{\text{grad}}f = -20\vec{u}_z$. 4. $\overrightarrow{\text{grad}}f = (6xy^5, 15x^2y^4, 0)$.

### Propriété

Le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}A$ est orthogonal en tout point aux **surfaces de niveau** (ou lignes équipotentielles) $A(M)$=constante.

### Le cours en exemples 5: Lignes de niveau et gradient

Tracer qualitativement le gradient des courbes de niveau de la figure 2.3.

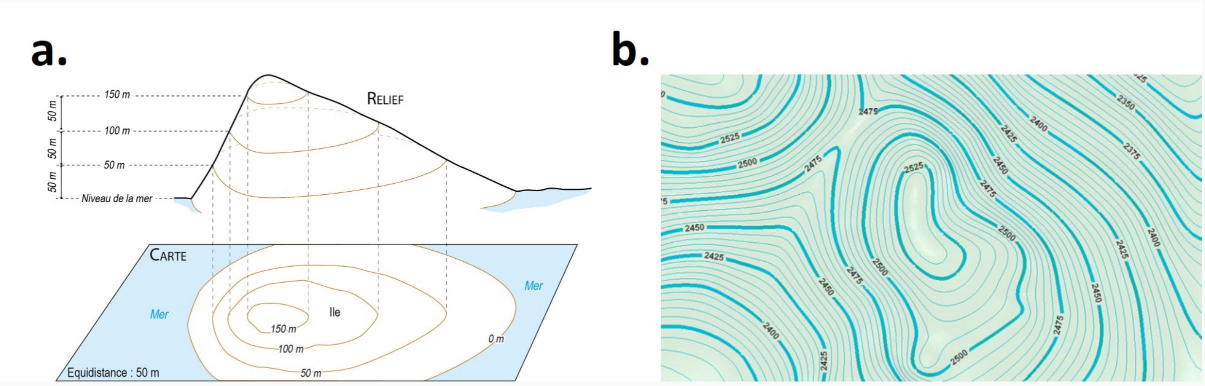



Figure 2.3 – **a.** Lignes de niveau d'une île. Source : dei.hypotheses.org. **b.** Lignes de niveau. Source : uncailloudanslachaussure.ch.

## 2.4 Divergence

**Définition**

La **divergence** est un opérateur qui s'applique sur un **vecteur** $\overrightarrow{A}$ pour **le transformer en scalaire**. En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{A}(M) = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}(M) = \frac{\partial A_x}{\partial x}(M) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(M) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(M) \tag{2.3}$$

⋆ La divergence est utilisée en physique pour modéliser **un flux**. On l'utilise à chaque fois que l'on veut exprimer la conservation d'une quantité.
⋆ On voit que la divergence de $\overrightarrow{A}$ peut s'exprimer comme un produit scalaire de l'opérateur nabla avec $\overrightarrow{A}$.

**Le cours en exemples 6: Calcul de divergences**

Calculer la divergence des vecteurs suivants :

1. $\overrightarrow{A} = 3\overrightarrow{u}_x - 5\overrightarrow{u}_y$.
2. $\overrightarrow{A} = (5x + y^2)\,\overrightarrow{u}_x + 36z\,\overrightarrow{u}_y$.
3. $\overrightarrow{A} = (4y)\,\overrightarrow{u}_x + 6z^2\overrightarrow{u}_z$.
4. $\overrightarrow{A} = (3x + 5xy)\,\overrightarrow{u}_x + 2y^3\overrightarrow{u}_y + yz\,\overrightarrow{u}_z$.

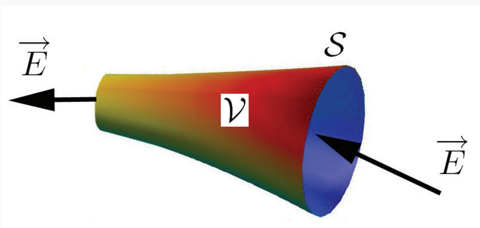
***Réponse :*** 1. $\operatorname{div}\overrightarrow{A} = 0$. 2. $\operatorname{div}\overrightarrow{A} = 5$. 3. $\operatorname{div}\overrightarrow{A} = 12z$. 4. $\operatorname{div}\overrightarrow{A} = 3 + 6y + 6y^2$.

**Théorème de Green-Ostrogradski**

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée orientée par le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{dS}}\,(M)$ délimitant un volume $V$. Alors tout vecteur $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ vérifie :

$$\iiint_V \operatorname{div}\overrightarrow{E}\,dV = \oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} \tag{2.4}$$

La quantité $\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS}$ représente une intégrale sur un contour fermé. Physiquement, ça représente le flux de $\overrightarrow{E}$ quittant le volume $V$.



## 2.5 Rotationnel

**Définition**

Le rotationnel est un opérateur qui s'applique sur un vecteur $\overrightarrow{A}$ pour le transformer en un autre vecteur. En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}(M) = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}(M) \tag{2.5}$$

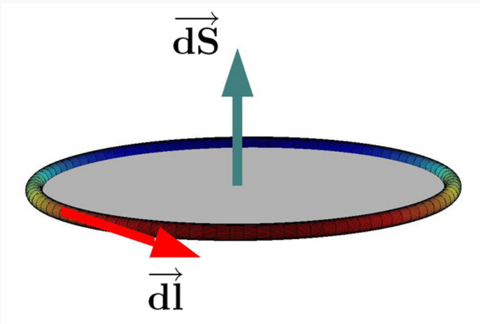
⋆ On utilise le rotationnel pour exprimer comment le vecteur $\overrightarrow{A}$ tourne dans l'espace.
⋆ On voit que le rotationnel de $\overrightarrow{A}$ peut s'exprimer comme un produit vectoriel de l'opérateur nabla avec $\overrightarrow{A}$.

**Théorème de Stokes-Ostrogradski**

Soit $\mathcal{C}$ un contour fermé orienté par le vecteur $\overrightarrow{dl}(M)$ délimitant une surface $\mathcal{S}$ orientée par le vecteur $\overrightarrow{dS}\,(M)$. Alors tout vecteur $\overrightarrow{A}$ vérifie :

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dS} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dl} \tag{2.6}$$

La quantité $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dl}$ s'appelle la circulation de $\overrightarrow{A}$ le long du contour fermé $\mathcal{C}$. Elle est liée au rotationnel de ce vecteur.




## 2.6 Laplacien

**Définition**

Le laplacien scalaire d'une grandeur scalaire $f$ est une grandeur scalaire notée $\Delta f$ et qui vaut :

$$\Delta f(M) = div\left(\overrightarrow{\text{grad}}\ f\right)(M) = \overrightarrow{\nabla}.\left(\overrightarrow{\nabla} f\right) = \overrightarrow{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}(M) \tag{2.7}$$

## 2.7 Relations utiles

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(fg) &= \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) g + f\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g\right)\\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right) &= \mathrm{div}\overrightarrow{A}+\mathrm{div}\overrightarrow{B}\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right) &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}\\
\mathrm{div}\left(f\overrightarrow{A}\right) &= \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right).\overrightarrow{A}+f\,\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}\right)\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(f\overrightarrow{A}\right) &= \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right)\wedge\overrightarrow{A}+f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right)\\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right) &= \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right).\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}.\left(\overrightarrow{B}\right)\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) &= \overrightarrow{0}\\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}\right) &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}
$$