Exam L2 Méca IUGC. 2024-2025.

Exercice 1. (2)

1. Faux : peut être immobile.
2. Faux : en N.m. Vrai ok
3. Vrai.
4. Vrai.
5. Faux : $\perp$.
6. Faux : $I = \sum_i m_i r_i^2$.
7. Faux : forces non-conservatives.
8. Vrai.

Exercice 2. (1.5)

1. Indirecte.
2. Directe
3. $= 9\vec{u_z} + \cancel{3\vec{u_y}} - \vec{u_z} - \vec{u_x} - \cancel{3\vec{u_y}} + 9\vec{u_x} = 8\vec{u_x} + 8\vec{u_z}$.
4. $= 6\vec{u_z} - 3\vec{u_r} + 8\vec{u_\theta}$.
5. $= 6\vec{u_x}$.
6. $= 50\vec{u_y}$.

Exercice 3. – Le comte de Monte-Cristo s'échappe. (4.25)

1a. $\vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{vmatrix} v_0 \\ 0 \\ -gt \end{vmatrix}$ $\quad \vec{OM} = \begin{vmatrix} v_0 t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + H_0 \end{vmatrix}$.
0.5

1b. Il faut que pour $x = D$, $z > h$: $-\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2} + H_0 > h$.
0.5

$\frac{1}{v_0^2} < \frac{2(H_0 - h)}{gD^2} \Rightarrow v_0 > \left(\frac{gD^2}{2(H_0-h)}\right)^{1/2}$

1c. Soit $v_0 > 5.7$ m/s $= 20.6$ km/h $\Rightarrow$ peu réaliste.
0.25

0.25 2a. $\Delta E_c = \sum W_{F_{ext}}$.

0.25 2b. $E_c(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2$.

0.25 2c. $W_{\vec{P}} = mgH_0$.

0.25 2d. $v_F^2 = v_0^2 + 2gH_0 \Rightarrow v_F = 25$ m/s $= 89.9$ km/h $\Rightarrow$ bcp.

0.25 3a. $S = \frac{m}{\rho L} = 0.036\ m^2$.

0.25 3b. Direction selon $-\vec{u_z}$.

0.25 3c. $I = \sum_i m_i r_i^2$

0.5 3d. $I = \int_{-L/2}^{L/2} \rho S dx\, x^2 = \rho S\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \rho S \frac{2}{3}\frac{L^3}{8} = \frac{1}{12}\rho S L^3 = I$.

0.25 3e. $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = 2563$ J.

0.5 3f. $E_{cf} = 18750\ J = \frac{1}{2}mv_F^2 + E_{c,rot} \Rightarrow v_F = 23.2$ m/s $= 83.6$ km/h $\Rightarrow$ ça n'aide pas beaucoup.

Exercice 4 : La sphère de la mort.

9

1a. $\vec{u_r} = \sin\theta\, \vec{u_x} + \cos\theta\, \vec{u_z}$ $\qquad$ $\vec{u_\theta} = \cos\theta\, \vec{u_x} - \sin\theta\, \vec{u_z}$.

1b. $\vec{OP} = R\,\vec{u_r} = R\sin\theta\, \vec{u_x} + R\cos\theta\, \vec{u_z}$.

1c. $\vec{v} = R\dot\theta\, \vec{u_\theta} = R\dot\theta\cos\theta\, \vec{u_x} - R\dot\theta\sin\theta\, \vec{u_z}$.

1d. $\vec{a} = R\ddot\theta\, \vec{u_\theta} - R\dot\theta^2\, \vec{u_r} = (R\ddot\theta\cos\theta - R\dot\theta^2\sin\theta)\, \vec{u_x} - (R\ddot\theta\sin\theta + R\dot\theta^2\cos\theta)\, \vec{u_z}$.

1e. $\vec{\omega} = \omega\, \vec{u_y} = \dot\theta\, \vec{u_y}$.

2a. $\vec{N}$ et $m\vec{g}$.
2b. $\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$.

2c. $\vec{\Gamma_N} = \vec{0}$ et $\vec{\Gamma_{mg}} = R\,\vec{u_r} \wedge (-mg)\,\vec{u_z} = R\,mg\sin\theta\, \vec{u_y} = \vec{\Gamma_{tot}}$

2d. $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma\, \vec{\Gamma}$.

2e. $\vec{L} = m\,R\,\vec{u_r} \wedge R\dot\theta\, \vec{u_\theta} = mR^2\dot\theta\, \vec{u_y}$. Toujours $/\!/\ \vec{u_y}$ $\Rightarrow$ mvt est plan ds le plan $\perp$ à $\vec{u_y}$.

2f. $\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot\theta = \cancel{R}\cancel{m}g\sin\theta \Rightarrow \ddot\theta = \dfrac{g}{R}\sin\theta$.

2g. $\displaystyle\int_{t_1}^{t} \dot\theta\ddot\theta\, dt = \int_{t_1}^{t} \frac{g}{R}\dot\theta\sin\theta\, dt$.

$\dfrac{1}{2}\dot\theta^2 - \dfrac{1}{2}\omega_0^2 = \dfrac{g}{R}(1-\cos\theta)$. $\Rightarrow \dot\theta^2 = \omega_0^2 + \dfrac{2g}{R}(1-\cos\theta)$.

2h. Au point bas, $\theta = \pi \Rightarrow \dot\theta^2 = \omega_0^2 + \dfrac{4g}{R}$.

3a. $\Delta E_m = \Sigma\, W_{\vec{F}\,n.c.}$.

3b. $E_m = \dfrac{1}{2} m R^2\omega_0^2 + 2mgR$

3c. $\dot\theta^2 = \omega_0^2 + \dfrac{4g}{R}$.

4a. Oz et $-\vec{u_z}$.
4b. Rayon $= R\sin\theta$.

4c. $\vec{L} = m\,R\sin\theta\, \vec{u_\rho} \wedge R\sin\theta\,\dot\phi\, \vec{u_\phi} = m R^2\sin\theta\,\dot\phi\, \vec{u_z} = \vec{L}$

4d. $\vec{u_\phi}$.
4e. $\vec{u_z}$.
4f. $\vec{u_\phi}$.
4g. La composante selon $\vec{u_z}$ fait tourner selon $\vec{u_\phi}$ et celle selon $\vec{u_\rho}$ ne fait pas tourner.
4h. Il faut que $\vec{N}$ compense le moment du poids, sinon il y a rotat° / $\vec{u_\phi}$.

Exercice 5 : Contre-braquage d'une moto. (3)

1. Ox , $-\vec{u}_x$.
2. $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$.
3. $\vec{\Gamma}_{\vec{F_1}} = -d\,\vec{u}_x \wedge F_1\,\vec{u}_y = -dF\,\vec{u}_z$.

   $\vec{\Gamma}_{\vec{F_2}} = -dF\,\vec{u}_z$.
4. $\vec{\Gamma}_{total} = -2dF\,\vec{u}_z$.
5. $\Delta\vec{L} = -2dF\,dt\,\vec{u}_z \Rightarrow \vec{L}$ forcé dans la direction $-\vec{u}_z$.
6. La roue tourne à gauche.

Exercice 6 : Orientation vers le soleil du satellite GPS-III . (3.5)

1. $I_{1,0} = I_{4,0} = I_0 + m\frac{9d^2}{4}$

   $I_{2,0} = I_{3,0} = I_0 + m\frac{d^2}{4}$.

   $I_{\eta,0} = 0$.
2. $I_{total,0} = 4I_0 + \frac{9}{2}md^2 + \frac{1}{2}md^2 = 4I_0 + 5md^2 = I_{total,0}$.
3. $E_1 = 4 \times \frac{1}{2}I_0\omega^2 = 2I_0\omega^2 = E_1$
4. $E_2 = \frac{1}{2}(4I_0 + 5md^2)\,\omega^2 = 2I_0\omega^2 + \frac{5}{2}md^2\omega^2 = E_2$
5. Solution 1 est la plus économique énergétiquement.
6. Pour avoir le plus grand bras de levier.
7. $\vec{\Gamma} = \left(\frac{3}{2}d + \frac{1}{2}a\right)\vec{u}_\rho \wedge F\,\vec{u}_\theta = \frac{1}{2}(3d+a)F\,\vec{u}_z = \vec{\Gamma}$
8. $$(4I_0 + 5md^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}(3d+a)F .$$

   $$\ddot{\theta} = \frac{3d+a}{2(4I_0 + 5md^2)}F .$$
9. $$\theta = \frac{1}{2}\frac{F(3d+a)}{2(4I_0+5md^2)}t^2$$ $\Rightarrow$ pour faire ½ tour :

   $$t = \left(\frac{4\pi(4I_0+5md^2)}{F(3d+a)}\right)^{1/2}$$