II Gaz de bosons dans un piège harmonique.

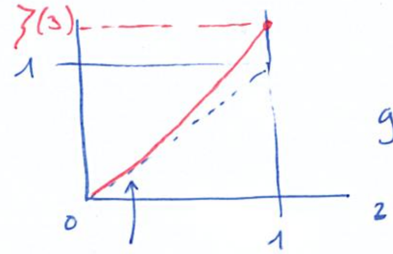
On a trouvé la densité d'états : $\rho(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon^2}{2\hbar^3\omega^3}$.

3) ⓐ Relation implicite : elle est toujours donnée par le calcul de $\langle N\rangle$

$$\boxed{\langle N\rangle = \int_0^{+\infty} \rho(\varepsilon)\langle n_\varepsilon\rangle\, d\varepsilon = \frac{1}{2\hbar^3\omega^3}\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}\, d\varepsilon = \langle N\rangle.}$$

ⓑ $\langle N\rangle \underset{\substack{x=\beta\varepsilon \\ dx=\beta d\varepsilon}}{=} \dfrac{1}{2\hbar^3\omega^3}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^3}\,\frac{x^2\,dx}{e^x z^{-1}-1}$ avec $z = e^{+\beta\mu} \in [0,1]$ car $\mu \leq 0$.

$$\boxed{\langle N\rangle = \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^3 g_3(z)}$$

ⓒ 

$g_3(z) \underset{z\to 0}{\sim} z$

$g_3(z) = \langle N\rangle\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^3$ permet de déterminer μ. (via z).

ⓓ A haute température :

$\langle N\rangle\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^3 = g_3(z) \to 0.$

soit $z \to 0 \Rightarrow$ on peut appliquer $g_3(z) \sim z$.

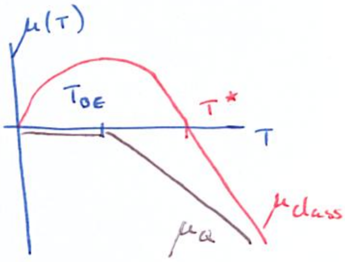
soit $e^{\beta\mu} = \langle N\rangle\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^3 \Rightarrow \boxed{\mu_{class} = -3k_BT\ln\dfrac{k_BT}{\hbar\omega\langle N\rangle^{1/3}}}$.

$\boxed{T^* = \dfrac{\hbar\omega\langle N\rangle^{1/3}}{k_B}}$.

Le graphe de $g_3(z)$ dit que à $\langle N\rangle\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^3$ donné, $z_Q < z_{class}$.

↑ issu de l'approx. $g_3(z) \sim z$

D'où $\underline{\mu_Q < \mu_{class}}$.



ⓔ Lorsque $T \searrow$ $\langle N\rangle\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^3 \nearrow \Rightarrow g_3(z)\nearrow \Rightarrow z \nearrow$

À $T = T_{BE}$, on atteint $z = 1$: $\zeta(3) = \langle N\rangle\left(\dfrac{\hbar\omega}{k_BT_{BE}}\right)^3$

D'où : $\boxed{T_{BE} = \dfrac{T^*}{\zeta(3)}}$. $< T^*$ donné par l'approx. classique (haute T).

A.N. : $T_{BE} = 4.5 \cdot 10^{-7}$ K. $= 450$ nK.

4) ⓐ L'intégrant est nul, d'où la borne "0" autorisée.

N' = nombre de bosons dans un état excité.

ⓑ $N'(T) = \left(\dfrac{k_BT}{\hbar\omega}\right)^3\zeta(3)$ via Q 3b. D'où : $\boxed{N'(T) = \langle N\rangle\left(\dfrac{T}{T_{BE}}\right)^3}$.

$\boxed{N_0 = N\left(1 - \left(\dfrac{T}{T_{BE}}\right)^3\right)}$. conforme à la fig. 4 gauche.

5) $E(T) = 0 + \displaystyle\int_{0^+}^{+\infty}\frac{\varepsilon\rho(\varepsilon)\,d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1} \underset{x=\beta\varepsilon}{=} \frac{1}{2\hbar^3\omega^3}(k_BT)^4\zeta(4).$

D'où $\underline{\dfrac{E}{Nk_BT_{BE}} = 3\left(\dfrac{T}{T_{BE}}\right)^4\dfrac{\zeta(4)}{\zeta(3)}}$ conforme à la fig 4 droite pour $T < T_{BE}$. D'où $\underline{C_v = 12Nk_B\left(\dfrac{T}{T_{BE}}\right)^3\dfrac{\zeta(4)}{\zeta(3)}}$

$\ll E_{class}$. $\ll C_{v,class}$.