Institut Villebon Georges Charpak - L2

Travaux Dirigés - Feuille n$^{\circ}$ 3 - Forces centrales

Exercice 1: Force centrale ou pas force centrale ?

Parmi les forces suivantes, identifier celles qui sont des forces centrales et calculer l'expression de l'énergie potentielle dont elles dérivent. v désigne une vitesse, θ l'angle entre le vecteur position et l'axe des x. Les autres termes (en dehors des vecteurs unitaires) sont des constantes si aucune dépendance n'est explicitement indiquée.

1. $\overrightarrow{F} = k\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_r$
2. $\overrightarrow{F} = qv\overrightarrow{u}_\theta \wedge B\overrightarrow{u}_z$
3. $\overrightarrow{F} = -f\overrightarrow{v}$
4. $\overrightarrow{F} = q\left(v_r\overrightarrow{u}_r + v_\theta\overrightarrow{u}_\theta + v_z\overrightarrow{u}_z\right) \wedge B\overrightarrow{u}_z$
5. $\overrightarrow{F} = qr\omega_p\overrightarrow{u}_\theta \wedge B\overrightarrow{u}_z$
6. $\overrightarrow{F} = A\left(r\cos\theta\overrightarrow{u}_x + r\sin\theta\overrightarrow{u}_y\right)$
7. $\overrightarrow{F} = qe\overrightarrow{u}_x$

Exercice 2: Orbite de la Lune autour de la Terre

On va étudier l'orbite de la Lune autour de la Terre. La masse de la Lune sera notée M_L et celle de la Terre M_T. On supposera que le centre de masse du système {Terre+Lune} se trouve au centre de la Terre. On supposera pour simplifier que le système {Terre+Lune} est isolé. On supposera également que la Terre et la Lune sont des objets ponctuels. Pour simplifier, on supposera que la Lune décrit alors une trajectoire circulaire de rayon $R = 381600$ km autour de la Terre.

1. Soit M la position de la Lune, à un instant donné, repérée par ses coordonnées polaires r et θ. Donner l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération de la Lune en notant O le centre de la Terre. Donner également l'expression du moment cinétique, $\overrightarrow{L}$, de la Lune par rapport à O.

2. Écrire l'énergie cinétique, l'énergie potentielle puis l'énergie totale de la Lune en fonction de r et θ, et de leurs dérivées par rapport au temps. On rappelle que la Lune est soumise à la force d'attraction gravitationnelle.

3. Réécrire l'expression de l'énergie totale en fonction de L, R, M_T, M_L et de la constante de gravitation universelle G. Sachant que $L^2 = GM_TM_L^2R$, simplifier l'expression de l'énergie totale en fonction de G, des masses et de R. Commenter le signe du résultat obtenu.

4. En utilisant la loi des aires, donner l'expression de la période de révolution de la Lune autour de la Terre, T, en fonction de G, R et de la masse de la Terre. Effectuer l'application numérique. On exprimera le résultat en jours-heures-minutes. On donne $M_T = 6.10^{24}$ kg et $G = 6, 6.10^{-11}$ SI.

5. En déduire que T^2/R^3 ne dépend pas de la masse de l'objet en orbite autour de la Terre.

Exercice 3: Les anneaux de Saturne

"On pourrait croire que les anneaux de Saturne sont d'un seul tenant. En fait il s'agit de nuées de pierrailles, dispersées tout au long d'un plan équatorial, qui circulent en orbites individuelles autour de la planète" affirmait Hubert Reeves dans un de ses ouvrages, "Poussières d'étoiles".
Le but de cet exercice est de juger la compatibilité d'un modèle avec la deuxième phrase de cette citation.
On donne :

- Rayon intérieur du premier anneau : 74 milliers de kilomètres.
- Rayon extérieur du dernier anneau : 136 milliers de kilomètres
- Distance Saturne Soleil $D = 1, 425.10^9$ km
- Rayon de Saturne $R_S = 60.10^3$ km.
- La constante de gravitation $G = 6, 67.10^{-11}$ u.S.I

On donne aussi la durée de révolution des satellites de Saturne autour de la planète.

satellite	durée de révolution	rayon de l'orbite (milliers de km)
Janus	17 h 58 min	159
Mimas	22 h 37 min	185,8
Encelade	1 j 8 h 53 min	238,3
Tethis	1 j 21 h 18 min	294,9
Dione	2 j 17 h 41 min	377,9

1. **Interaction de gravitation -** On considère une planète P, de symétrie sphérique, de masse M et un objet assez petit (assimilable à un point matériel) de masse m situé à l'extérieur de la planète. Donner l'expression vectorielle de la force F exercée par la planète sur l'objet. On précisera, sur un schéma, la direction et le sens de cette force. On définira de façon précise les différents paramètres utilisés pour l'exprimer.

2. **Satellite gravitant sur une orbite circulaire -**

   a. Dans l'étude d'un satellite terrestre, on utilise le référentiel géocentrique. Dans le cas présent, quel référentiel analogue doit-on choisir ? Préciser ses caractéristiques.

   b. Un objet ponctuel gravite sur une orbite circulaire, de rayon r, soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle de la planète P. Montrer que la valeur de la vitesse v de l'objet reste constante et exprimer cette vitesse en fonction de r et des paramètres définis précédemment.

   c. Définir la période de révolution T et donner son expression avec les mêmes paramètres que la vitesse v. Montrer qu'on retrouve ainsi la troisième loi de Kepler. Préciser, dans la situation présente, l'expression de la constante utilisée dans cette loi. En utilisant les données relatives à l'un des satellites, déduire la masse de Saturne.

3. **Disposition d'une série d'objets ponctuels sur une même orbite -** Soit un ensemble d'objets, assimilables à des points matériels, mais de tailles et de masses différentes, satellisés autour de Saturne sur une même orbite circulaire de rayon r qu'ils parcourent tous dans le même sens. La figure 1 ci-dessous donne la configuration de ces objets à un instant de date donnée (les échelles de taille des objets, par rapport à Saturne, n'ont pas été respectées). On fait en outre l'hypothèse que les interactions gravitationnelles entre ces objets sont négligeables par rapport à celle exercée par Saturne sur chacun d'eux.
   Tous ces objets ont-ils la même vitesse sur l'orbite ? Justifier.
   Comment évolue la structure de l'ensemble au cours du temps ?

Figure 1 (question 3)

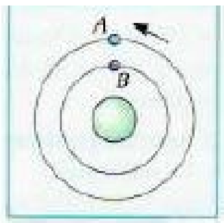


Figure 2 (question 4)

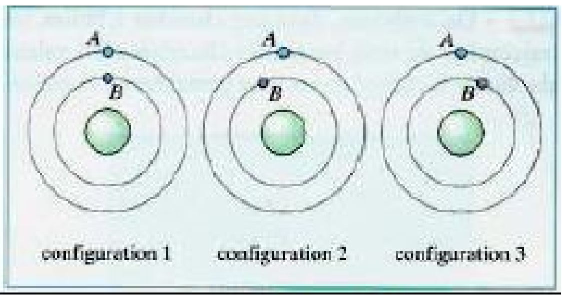
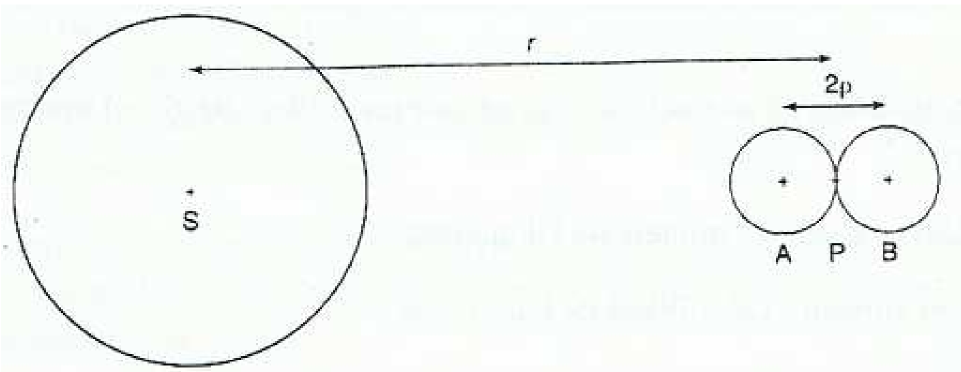


Figure 3 (question 4)

4. **Disposition de deux objets ponctuels sur deux orbites de rayons différents -** Soient deux objets A et B, assimilables à des points matériels, satellisés autour de Saturne sur deux orbites circulaires de rayon r_A, et r_B différents ($r_A > r_B$), mais de valeurs voisines. La figure 2 ci-dessus donne la configuration de ces objets à un instant de date donnée : ils sont disposés de façon que la direction AB passe par S, le centre de Saturne ; la flèche indique le sens des mouvements (les échelles des rayons n'ont pas été respectées). Ici encore, on considère que l'interaction gravitationnelle entre ces deux objets est négligeable et que seule celle de Saturne intervient. À une date ultérieure, l'objet satellite A a effectué exactement une révolution autour de Saturne ; on souhaite savoir où se trouve l'objet B sur son orbite.
   Indiquer, en justifiant, laquelle des trois configurations proposées dans la figure 3 est possible.

5. **Les anneaux de Saturne -** Décrire le mouvement des particules constituant un "anneau" de Saturne.
   Décrire sommairement le mouvement des anneaux les uns par rapport aux autres.
   À l'aide de l'étude qui précède, en supposant valides les hypothèses faites au 3, montrer que si les anneaux de Saturne ont été à un moment donné d'un seul tenant (soudés les uns aux autres), il est peu probable qu'ils aient pu le rester.

6. **La sphère de Roche -** Une autre raison explique en partie l'existence des anneaux de Saturne. Il existe une distance R_0, appelée rayon de la sphère de Roche qui marque la limite entre une zone où des satellites peuvent se former par assemblage de poussières, cailloux... qui s'étaient formés en même temps que l'astre et une zone où cet assemblage est rendu impossible par l'action de l'astre. Il s'agit dans la suite de déterminer les raisons de l'existence de cette limite.
   On considère donc deux sphères homogènes identiques en contact de masse m et de rayon ρ telles que la distance de leurs centres A et B soit $AB = 2\rho$. Le centre de gravité P de l'ensemble des deux sphères tourne à une distance r du centre S de Saturne (de masse M). Les points S, A, P et B sont alignés.



   Exprimer en fonction des paramètres utiles la valeur de la force d'attraction F_AB qui s'exerce entre les sphères de centres A et B.
   Les deux sphères sont attirées par Saturne par deux forces de valeur $F_{S/A}$ et $F_{S/B}$. Donner l'expression de $F_{S/A}$, de $F_{S/B}$, puis de la différence $F_{S/A} - F_{S/B}$. Pourquoi les deux sphères ne sont-elles pas attirées de la même façon par Saturne ?
   La différence $F_{S/A} - F_{S/B} = 4G\frac{mM\rho}{r^3}$ est encore appelée "force de marées". Cette différence d'attraction a tendance à séparer les deux sphères. R_0, le rayon de la sphère de Roche, est tel que pour $r = R_0$, on a : $F_{AB} = F_{S/A} - F_{S/B}$. L'espace où les deux éléments A et B peuvent se regrouper pour donner naissance à un élément plus gros est-il défini par $r < R_0$ ou par $r > R_0$? Justifier la réponse.
   À votre avis, dans quelle zone se situent les anneaux de Saturne et où sont situés ses satellites ?