Institut Villebon Georges Charpak - L2

Travaux Dirigés - Feuille n° 2 - Moment cinétique - Produit vectoriel

Exercice 1: Axe de rotation et bras de levier

Identifier, sur chaque dessin, l'axe autour duquel vont tourner les points rouges et leur bras de levier.

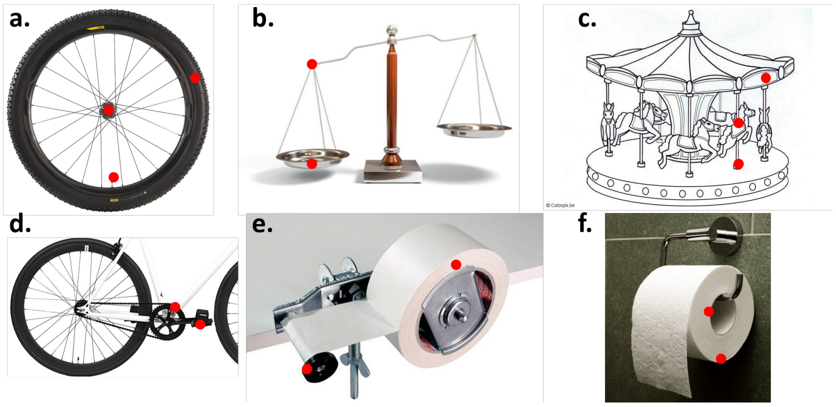


Figure 1: Crédits photo : Decathlon, Elloul, Colorpix, Alltricks, Craftmester, Wikipedia.

Exercice 2: Produit vectoriel

Aller sur eCampus (UE Sport & Sciences - Physique) et faire la fiche d'exercices sur le produit vectoriel.

Exercice 3: Moment cinétique

1. Soit un électron ayant une trajectoire circulaire autour du noyau d'un atome. Calculer son moment cinétique par rapport au centre du noyau.

    - Le rayon de sa trajectoire : $r = 5,3.10^{-11}$ m
    - Sa fréquence de rotation à vitesse constante : $f = 6,6.10^{15}$ Hz
    - La masse de l'électron : $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg

2. La Lune a un mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. Calculer le moment cinétique de la Lune par rapport au centre de la Terre.

    - Le rayon de sa trajectoire : $r = 3,8.10^5$ km
    - Sa période de révolution autour de la Terre : $T = 27,3$ jours
    - La masse de la Lune : $m_L = 7,3.10^{22}$ kg

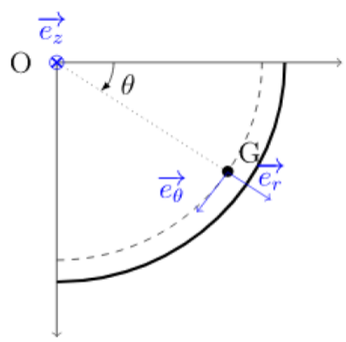
Exercice 4: Pendule simple

On considère un pendule fixé au point O, formé d'un fil rigide de longueur l et de masse négligeable au bout duquel est accrochée, en M, une masse supposée ponctuelle. À l'instant $t = 0$, le pendule est écarté de l'angle θ_0 et est lâché sans vitesse initiale. Le système étudié est l'objet de masse m. Les frottements sont négligés. On considère de petites oscillations, où l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ est valable.

1. Faire un schéma et représenter les forces qui s'exercent sur le système.
2. Écrire le vecteur position en coordonnées polaires. On notera θ l'angle entre la verticale et le fil du pendule.
3. Exprimer le moment du poids en fonction de m, g, r et θ. Attention aux projections sur les axes ! Utiliser les coordonnées polaires.
4. Exprimer le moment cinétique en fonction de m, r et $\omega = \dot{\theta}$.
5. Utiliser le théorème du moment cinétique pour trouver l'équation différentielle qui régit ce système. La résoudre.

Exercice 5: Vitesse d'un enfant à la sortie d'un toboggan

Un enfant glisse assis le long d'un toboggan. Celui-ci est une portion de cercle de centre O et de rayon 2,7 m.
Le centre de gravité de l'enfant, note G, glisse tout au long de la descente à 20 cm au-dessus du toboggan.
L'angle que fait le rayon $\overrightarrow{OG}$ de la trajectoire de l'enfant avec l'horizontale est note θ.
Initialement, l'enfant s'élance d'une position $\theta_0 = 15°$ sans vitesse initiale. En sortie du toboggan, l'angle θ vaut 90°. On considère que tout frottement est négligeable.



1. Indiquer sur le schema les forces qui s'exercent sur G.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique au point G afin de determiner l'equation différentielle de son mouvement.
3. En déduire l'expression de la vitesse de l'enfant en fonction de l'angle θ et des conditions initiales (astuce : multiplier par $\dot{\theta}$).
4. Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter.

Exercice 6: Balance

L'objet de cet exercice est de réviser le calcul du moment des forces. On cherche l'équilibre d'une balance, en appliquant non pas le principe fondamental de la dynamique (somme des forces = vecteur nul) mais le théorème du moment cinétique (somme des moments des forces = vecteur nul).
On considère donc une balance formée d'un fléau de longueur $L = 100$ cm. Ce fléau est attaché de manière fixe au point O placé à $l = 20$ cm à droite d'une des extrémités A du fléau. En A est aussi attaché le plateau qui va supporter les marchandises. La masse du plateau et du système d'attache en A est $m = 0,5$ kg.
Afin d'équilibrer la balance, on utilise un crochet attaché au point X du fléau situé à la distance x de O, ce crochet peut être librement déplacé le long du fléau. Au bout de ce crochet de masse négligeable, on attache une masse $m' = 5$ kg.

1. L'ingénieur qui a conçu la balance considère qu'on peut négliger le fait que le fléau soit en fer, c'est-à-dire que l'ingénieur suppose que le fléau a une masse nulle. Il cherche à calibrer sa balance, c'est-à-dire a relier directement x à la masse de l'objet sur le plateau.

   a. En absence d'objet sur le plateau, determiner la position x_0 de la masse m' sur le fléau.

   b. On place une masse M sur le plateau. Déterminer la nouvelle position x de la masse m' sur le fléau. Effectuer l'application numérique pour un sac de pommes de terre de 10 kg.

2. Le responsable de l'entreprise qui s'apprêtait à vendre la balance demande a l'ingénieur de vérifier son hypothèse et donc de refaire ses calculs en tenant compte du fait que le fléau n'est pas de masse négligeable. La section du fléau est telle que la masse linéique du fléau est $\mu_l = 5$ kg/m.

   a. Quelle est la section du fléau sachant que la masse volumique du fer est $\rho = 7,874$ g/cm^3 ?

   b. Calculer la nouvelle position x'_0 de la masse m' sur le fléau.

   c. Calculer la nouvelle position x' de la masse m' sur le fléau en presence de la masse M. Effectuer l'application numérique avec le même sac de pommes de terre de 10 kg.

   d. Réciproquement, quelle masse M' sur le plateau correspond à la position x calculée à la question 1 ? Par consequent, en utilisant l'approximation de la question 1, quel serait le poids mesuré du sac de pommes de terre ?

3. Conclusion : la négligence initiale de l'ingénieur pouvait-elle porter préjudice à l'image de l'entreprise ?

Exercice 7: Vitesse d'un satellite sur son orbite elliptique

On considère un satellite de masse 1 tonne en orbite elliptique autour de la Terre. Le satellite se maintient sur cette trajectoire car il est soumis à la force gravitationnelle qu'exerce sur lui la Terre. Cette force est en permanence dirigée vers le centre de la Terre. On note :

- O le centre de la Terre qui est un des foyers de l'ellipse ;
- C le centre de l'ellipse ;
- A l'apogée du satellite (point de l'orbite le plus éloigné de la surface de la Terre) ;
- P son perigée (point de l'orbite le plus proche de la surface de la Terre) ;
- A' le point de la surface de la Terre qui fait face à A, l'apogée du satellite ;
- P' le point de la surface de la Terre qui fait face à P, le perigée du satellite ;
- S le point tel que $\overrightarrow{CS}$, vertical dirigé vers le haut, représente le demi-petit axe de l'ellipse.

On donne les grandeurs suivantes :

- Distance $CS = 16715$ km
- Distance $AA' = 35000$ km
- Distance $PP' = 350$ km
- Distance $OA' = OP' = R_T = 6400$ km

On considère que le satellite est en mouvement dans un référentiel galilee dont le centre est situé au centre de la Terre.

1. Réaliser une figure comportant toutes les indications de l'énoncé. Représenter le satellite en S avec sa vitesse $\overrightarrow{v}$ et les vecteurs polaires $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$.
2. La vitesse en S est $v_s = 14650$ km/h. Calculer le moment cinétique du satellite en S par rapport au point O (un angle permettant de repérer le satellite peut être utile).
3. En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver la vitesse du satellite à son apogee A et a son perigee P.

Exercice 8: Atome de Bohr

On considère un électron de charge $q = -e$ et de masse m en orbite autour d'un proton fixe de charge $+e$ situé à l'origine O du système de coordonnées. On repère l'électron avec le vecteur $\overrightarrow{r}$, selon le rayon allant du proton à l'électron. Le système étudié est l'électron.

1. Une approximation a été faite dans l'énoncé precedent. Laquelle ?
2. Faire un schéma du problème et représenter les forces s'exerçant sur le système.
3. Montrer que la trajectoire de l'électron est plane. Dans la suite, on utilisera les coordonnées polaires (r,θ) pour repérer la position de l'électron et on négligera les effets de la gravitation.
4. En utilisant la base polaire, la force subit par l'electron s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = \frac{-K}{r^2}\overrightarrow{u}_r \text{ où } K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

   De quelle énergie potentielle, que l'on notera $E_p(r)$, derive cette force? On choisira pour condition aux limites $E_p(+\infty) = 0$.

5. On note $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{u}_r \wedge \overrightarrow{u}_\theta$. Soit $\overrightarrow{L}$ le moment cinétique de l'électron par rapport à O. Exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{L}$ dans la base $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{k})$ en fonction de m, r et $\omega = \dot{\theta}$.
6. On considère que la trajectoire de l'électron est un cercle de rayon R. En utilisant le principe fondamental de la dynamique,
   a. Montrer que le mouvement est circulaire uniforme
   b. Calculer l'expression de la norme du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$, en fonction de K, m et R.
   c. Montrer que l'énergie mécanique totale est $E = \frac{-K}{2R}$.
7. Calculer la norme du moment cinétique de l'electron en fonction de K, m et R.
8. En 1913, Niels Bohr a émis l'hypothèse que le moment cinétique ne pouvait prendre que des valeurs discrètes : $L = n\hbar$ où n est un entier et $\hbar$ =1,05.10^{-34} J/s.
   Montrer alors que les valeurs possibles pour le rayon R et l'énergie mécanique totale E se mettent sous la forme : $R = R_B n^2$ et $E = \frac{-E_B}{n^2}$. On exprimera R_B et E_B en fonction de $\hbar$, m et K. Exprimer les valeurs numériques de R_B et E_B en nanomètres et en electron-Volts (1 eV=1,602.10^{-19} J). On donne $K = 2,31.10^{-28}$ u.S.I. et $m = 9,11.10^{-31}$ kg.