Institut Villebon Georges Charpak - L2

Travaux Dirigés - Feuille n° 1 - Révisions

Exercice 1: Bases orthonormées directes

Aller sur eCampus (UE Sport & Sciences - Physique), regarder si besoin la video n° 1, et faire la fiche d'exercices n° 1 sur les bases orthonormées directes.

Exercice 2: Coordonnées et norme de vecteur

Aller sur eCampus (UE Sport & Sciences - Physique), regarder si besoin la video n° 2, et faire la fiche d'exercices n° 2 sur les coordonnées de vecteurs.

Exercice 3: Produit scalaire

Aller sur eCampus (UE Sport & Sciences - Physique), regarder si besoin la video n° 3, et faire la fiche d'exercices n° 3 sur le produit scalaire.

Exercice 4: Coordonnées polaires

On considère un enfant assis sur un petit cheval dans un manège. L'enfant reste constamment à la distance $R = 2$ m de l'axe de rotation du manège. A l'instant $t = 0$, le manège est à l'arrêt et l'enfant se trouve à côté de ses parents qui, eux, ne sont pas sur le manège. Les parents resteront immobiles durant les tours de manège de leur enfant. La direction axe-du-manège–parents définit un axe Ox où O est sur l'axe de rotation du manège. On note Ox' la direction axe-du-manège–enfant. On note θ , l'angle entre Ox et Ox'. On définit les axes Oy et Oy' orthogonaux à Ox et Ox' respectivement tels que l'angle entre Ox et Oy est de $+90°$ ainsi que l'angle entre Ox' et Oy'. Ces quatre axes sont dans le plan horizontal.

1. Faire un schéma représentant les quatre axes à un instant $t \neq 0$ ainsi que la trajectoire de l'enfant. Exprimer les coordonnées cartésiennes de l'enfant x et y en fonction de R et θ. Quelle relation relie x^2, y^2 et R^2 ?

2. Donner les coordonnées polaires de l'enfant en fonction des données de l'exercice. Exprimer ensuite ces coordonnées en fonction de x et y calculés précédemment.

3. Quelles sont les distances parcourues par l'enfant (ou plutôt son petit cheval) lorsque le manège a fait un quart de tour, un tour complet, un angle θ quelconque ?

4. Le mouvement du manège en fonction du temps est défini par les conditions suivantes :

   i. Pour $t < 5$ s, la norme de la vitesse croît linéairement avec le temps : $v = kt$, $k > 0$.

   ii. A $t_1 = 5$ s, le manège a fait un quart de tour et a une vitesse notée v_1.

   iii. Ensuite, le manège fait deux tours et demi à vitesse constante $v = v_1$ jusqu'à l'instant $t = t_2$.

   iv. Enfin, la norme de la vitesse décroît linéairement avec le temps : $v = v_1 - k(t - t_2)$.

   a. Rappeler l'expression du vecteur position, $\overrightarrow{OM}$, où M est le point où se trouve l'enfant, en coordonnées polaires en fonction de r, θ et des vecteurs de base $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$.

   b. Déterminer l'expression du vecteur vitesse, $\overrightarrow{v}$, en coordonnées polaires en fonction de r, θ, de leurs dérivées temporelles et des vecteurs de base $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$.

   c. Déterminer l'expression du vecteur accélération, $\overrightarrow{a}$, en coordonnées polaires en fonction de r, θ, de leurs dérivées temporelles et des vecteurs de base $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$.

   d. Simplifier ces expressions sachant que la trajectoire est circulaire. Préciser les vecteurs vitesse et accélération dans chaque intervalle de temps $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$.

   e. Représenter schématiquement les vecteurs vitesse et accélération sur un schéma lorsque le manège a fait un huitième de tour puis un demi-tour et enfin 2 tours et 7/8.

Réponse : 1. $x = R\cos\theta$; $y = R\sin\theta$; $R^2 = x^2 + y^2$. 2. $R = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \mathrm{Arctan}\frac{y}{x}$. 3. Au bout de 1/4 de tour, la distance parcourue est 3,14 m ; au bout d'un tour 12,6 m ; pour un angle θ quelconque $L = 2\theta$. 4. a. $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r$. b. $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$. c. $\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r$. d. Pour $t \in [0, t_1]$, on a $\overrightarrow{v} = kt\overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{u}_\theta - \frac{k^2t^2}{R}\overrightarrow{u}_r$. Pour $t \in [t_1, t_2]$, on a $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{a} = -\frac{v_1^2}{R}\overrightarrow{u}_r$. Pour $t \in [t_2, t_3]$, on a $\overrightarrow{v} = (v_1 - k(t-t_2))\overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{a} = -k\overrightarrow{u}_\theta - \frac{(v_1-k(t-t_2))^2}{R}\overrightarrow{u}_r$.

Exercice 5: Lancement d'une fusée

1. Expliquer pourquoi l'éjection des gaz à grande vitesse permet à une fusée d'être propulsée depuis son pas de tir et puis dans l'espace sans gravitation.

2. Qu'est-ce que la force de poussée pour la fusée ?

3. La fusée (structures et équipement) avant allumage a une masse $M_0 = 5$ T. La masse du mélange propulsif est $m_0 = 50$ T au départ. On suppose que l'éjection des gaz se fasse à débit constant $D = 400$ kg.s^{-1} et à vitesse constante relativement à la fusée $u = 2500$ m.s^{-1}. La force de poussée s'écrit $D\overrightarrow{u}$. On néglige la résistance de l'air et on suppose de l'accélération de la pesanteur est constante, soit $g = 10$ m.s^{-2}. (source Dunod Mécanique 1) À quelle condition la fusée décolle-t-elle du sol verticalement ?

Réponse : 1. L'ensemble fusée + gaz de propulsion est un système pseudo-isolé. Ainsi le centre de masse est immobile avant et après expulsion. Ceci explique que, au moment du lancer, les gaz étant expulsés, la fusée est propulsée. Dans l'espace, le même raisonnement s'applique. 2. C'est la force qu'exercent les gaz sur le sol. Elle dépend du débit de gaz et de la vitesse d'éjection. 3. Pour qu'il y ait décollage, il faut que $M(t=0)g = (M_0 + m_0)g < Du$.

Exercice 6: Mouvement rectiligne sur une route horizontale

1. Une voiture de masse m roule à la vitesse $\overrightarrow{v}_0$ constante sur une route horizontale ; faites le bilan des forces qu'elle subit. Quelle est leur résultante ?

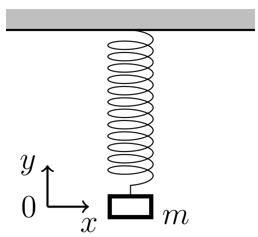
2. Le chauffeur coupe alors son moteur ; faites le nouveau bilan des forces. Sachant que la résultante des forces de frottement est proportionnelle au vecteur vitesse : $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$, écrivez l'équation différentielle du mouvement. Comment varie la vitesse en fonction du temps ? Calculer la position en fonction du temps.

3. Lorsque la voiture s'arrête, elle se trouve sur un lac gelé où elle peut rouler sans frottement ($\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$). Un moustique, de masse $m_{moustique}$, vient s'écraser sur le pare-brise avec une vitesse $\overrightarrow{v}_0$. Décrire ce qu'il se passe. Quelle est la vitesse $\overrightarrow{v}_1$ de la voiture (avec le moustique écrasé) après le choc ?

Réponse : 1. La résultante des forces est nulle. 2. $\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0$ donne $\dot{x} = v_0 e^{-\frac{kt}{m}}$ puis $x(t) = \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$. 3. L'ensemble moustique + voiture est un système pseudo-isolé. Il y a donc conservation de la quantité de mouvement, d'où $\overrightarrow{v_1} = \frac{m_{moustique}}{m+m_{moustique}}\overrightarrow{v}_0$.

Exercice 7: Masse suspendue à un ressort

Un mobile de masse m est suspendu à un ressort. La longueur à vide du ressort (sans masse suspendue) est L_0 et la position du bout du ressort $y = 0$. Avec la masse m suspendue, le ressort à une longueur L à l'équilibre, et la masse se trouve à une position y. À $t = 0$, on le lâche à une position y_0 et sans vitesse initiale.



1. Quelle est l'élongation du ressort en fonction de L et L_0. La donner également en fonction de y.

2. Faire le bilan des forces et écrire le principe fondamental de la dynamique.

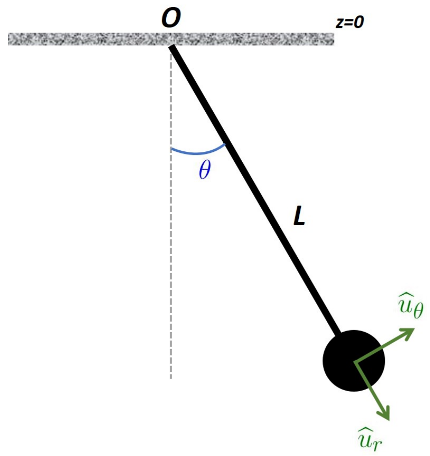
3. Résoudre le PFD en exprimant $y(t)$, la position du mobile à tout instant.

4. Déterminer la pulsation ω et la période T du mouvement.

Réponse : 1. L'élongation vaut $L - L_0 = -y$. 2. Il y a la force $\overrightarrow{F} = -ky\overrightarrow{u}_y$ de rappel du ressort et le poids $m\overrightarrow{g}$. D'où $m\ddot{y} = -ky - mg$. 3. Ainsi $\ddot{y} + \frac{k}{m}y = -g$. En résolvant l'équation différentielle, on obtient : $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - \frac{gm}{k}$. Avec les conditions initiales, on a $y(t) = \left(y_0 + \frac{gm}{k}\right)\cos(\omega t) - \frac{gm}{k}$. On a donc un mouvement périodique. 4. La pulsation vaut $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et la période du mouvement vaut $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Exercice 8: Pendule simple

On va établir l'équation du pendule simple de longueur L, sans frottements, via deux méthodes, l'une utilisant le PFD, l'autre en utilisant la conservation de l'énergie.



1. Dans cette question, on va établir l'équation du pendule simple en utilisant le PFD.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$.
   (b) Donner la vitesse $\overrightarrow{v}$ puis l'accélération $\overrightarrow{a}$ dans la même base.
   (c) Écrire le PFD et établir une relation entre $\ddot{\theta}$, g, L et $\sin\theta$.
   (d) Dans la limite des petits angles θ, on a $\sin\theta \sim \theta$. En déduire l'équation entre $\ddot{\theta}$, g, L et θ.
   (e) La résoudre en supposant que le pendule est lâché d'un angle θ_0 avec une vitesse nulle.
2. Dans cette question, on va établir la même question en utilisant la conservation de l'énergie.
   (a) Exprimer l'énergie cinétique puis l'énergie potentielle en supposant que l'énergie potentielle est nulle en $z = 0$.
   (b) À partir du théorème de l'énergie mécanique et de la limite des petits angles ($\sin\theta \sim \theta$), établir l'équation du mouvement.

Réponse : 1.a. $\overrightarrow{OM} = L\overrightarrow{u}_r$. b. $\overrightarrow{v} = L\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{a} = L\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r$. c. $L\ddot{\theta} = -g\sin\theta$. d. $\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta$. e. $\theta = \theta_0\cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. 2. $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$ et $E_p = -mgL\cos\theta$. $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\sin\theta = 0$, d'où $\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta$.

Exercice 9: Quelle hauteur pour ce jet d'eau ?

Le célèbre jet d'eau du lac Léman culmine à une hauteur de près de 140 m. On fournit ci-dessous des informations techniques issues de la fiche touristique de la ville :

Vitesse d'éjection	:	200 km/h
Débit	:	500 L/s
Puissance des pompes	:	1 MW
Puissance de l'éclairage	:	9 kW

À l'aide de ces données, retrouver l'ordre de grandeur de la hauteur du jet ?

Réponse : $h = \frac{v^2}{2g} \approx 154$ m.

Exercice 10: Mais jusqu'où iront-ils ?

Retrouver la hauteur maximale que peut atteindre un athlète lors de l'épreuve de saut à la perche.

Figure 1: Arnaud Duplantis, lors de son record du monde aux JO de Paris (6,25 m) (photo Reuters).

Réponse : $h = \frac{v^2}{2g} \approx 5.1$ m en supposant qu'un perchiste court à une vitesse de 10 m/s.