Exam. L2 méca 2023-2024.

Exercice 1.

1. Vrai 2. Vrai 3. Faux (c'est le produit vectoriel). 4. Vrai : $\vec{F} \perp$ orbite.
5. Faux : $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$. 6. Vrai : $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$. 7. Faux : uniquement s'il n'y a pas de forces non conservatives. 8. Vrai : $\vec{r}$ dépend du point d'application de la force.

Exercice 2.

1. Indirecte 2. Directe. 3. $= 2\vec{u_z} + 4\vec{u_y} + 4\vec{u_z} - 8\vec{u_x} + \vec{u_y} + \vec{u_x} = -7\vec{u_x} + 5\vec{u_y} + 6\vec{u_z}$.
4. $= 5\vec{u_z} + \vec{u_\theta} - 3\vec{u_r}$ 5. $\vec{u_z}$ 6. $-3\vec{u_x}$.

Exercice 3.

1. (a) $\vec{v} = v_0 \cos\alpha \, \vec{u_x}$ (b) Syst. pseudo-isolé $\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{reste à l'arrêt si initialement à l'arrêt} \\ \text{mvt rect. unif. sinon.}\end{cases}$
   (c) Poids + réaction de la glace : $\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$.
   (d) Mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$.
   (e) Freiner en ouvrant ses ailes par exemple pour ↗ les frottements.
2. (a) $\Delta E_m = \sum W_{\vec{F}_{n.c}}$. (b) $E_c(t=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2\alpha$.
   (c) $W_{\vec{P}} = W_{\vec{N}} = 0$ $W_{\vec{F}} = -F\vec{u_x} \cdot x\vec{u_x} = -Fx$.
   (d) $E_c(t_f) + mgz - E_c(t=0) - mgz = -Fx = -\frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2\alpha$.
   $x = \frac{1}{2F} m v_0^2 \cos^2\alpha$.
   (e) Le pigeon a intérêt à atterrir avec l'angle α le + petit possible.

Exercice 4.

1. $\vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix}$ $\vec{v} = \begin{vmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ -gt + v_{0z} \end{vmatrix}$ $\vec{OM} = \begin{vmatrix} v_{0x} t + 160 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t + 420. \end{vmatrix}$

2. $\begin{cases} 0 = v_{0x} t + 160 \\ 197 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t + 420. \end{cases}$

3. Si $v_{0z} = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} g t^2 = 223\,m$ $\Rightarrow$ $t = 6.7s$ $\Rightarrow$ $v_{0x} = -23.7\,m/s = 85.4\,km/h$
   peu réaliste.

4. Si $v_{0z} = 2\,m/s$ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{2} g t^2 + 2t + 223 = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta = 4 + 4g \times 223 = 8'745.6$.
   $t = \frac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{-g} > 0$ $\Rightarrow$ $t = \frac{2 + \sqrt{\Delta}}{g} = 9.75\,s$. $\Rightarrow$ $v_{0x} = -16.4\,m/s = 59\,km/h$.

5. Ça semble difficile, mais c'est un super-héros...

Exercice 5.

1. (a) $\vec{u_r} = \sin\theta\,\vec{u_x} - \cos\theta\,\vec{u_y}$. $\vec{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}$.

(b) $\vec{OP} = r\,\vec{u_r} = r\sin\theta\,\vec{u_x} - r\cos\theta\,\vec{u_y}$.

(c) $\vec{v} = \dot r\,\vec{u_r} + r\dot\theta\,\vec{u_\theta} = (\dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta)\,\vec{u_x} + (-\dot r\cos\theta + r\dot\theta\sin\theta)\,\vec{u_y}$.

(d) $\vec{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec{u_r} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\vec{u_\theta} = \left[(\ddot r - r\dot\theta^2)\sin\theta + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\cos\theta\right]\vec{u_x}$
$+ \left[-(\ddot r - r\dot\theta^2)\cos\theta + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\sin\theta\right]\vec{u_y}$.

2. (a) $I = \sum_i m_i r_i^2$ (b) $\vec{\omega} = \dot\theta\,\vec{u_z}$ (c) $I = m d^2 = 15'750$ kg.m².

(d) $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$.

3. (a) Oui : force constante selon $-\vec{u_r}$ (b) Le poids et la tension du fil.

(c) $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ (d) $\vec{M}_{\vec T} = \vec{0}$ et $\vec{M}_{\vec P} = d\,\vec{u_r} \wedge (+mg)(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$
$= -mgd\sin\theta\,\vec{u_z}$.

(e) $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}} = -mgd\sin\theta\,\vec{u_z}$.

(f) $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ est toujours suivant $\vec{u_z}$ => ne change pas de direction.

(g) $I\ddot\theta + mgd\sin\theta = 0$.

(h) $I\ddot\theta + mgd\,\theta = 0 \Rightarrow \theta = A\cos\sqrt{\frac{mgd}{I}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{mgd}{I}}\,t$

$\sqrt{\frac{mgd}{I}} = \sqrt{\frac{g}{d}} = \omega$ et $\theta(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0$.

$\dot\theta(t=0) = B\omega = \omega_0 \Rightarrow B = \dfrac{\omega_0}{\omega}$.

$\theta(t) = \dfrac{\omega_0}{\omega}\sin\omega t$ et $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{d}}$.

(i) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{g}}$.

(j) $\vec{v} = d\,\underset{\vec{u_\theta}}{\dot\theta} = d\,\omega_0\cos\omega t\,\vec{u_\theta}$.

(k) $\|\vec v\| \nearrow$ quand $d \nearrow$ => normal, c'est comme le pendule.

Exercice 6.

1. Ox

2. $\lambda = \dfrac{\eta_{jupe}}{L}$

3. Le centre de masse G est tel que :

$L_1 + x_G = \dfrac{L_1 + L_2}{2} \Rightarrow x_G = \dfrac{L_2 - L_1}{2}$

$\vec{\Gamma}_{jupe} = m_{jupe}\,g\,\dfrac{L_2 - L_1}{2}\,\vec{u_x}$.

4. $\vec{\Gamma}_\eta = -\eta\,g\,r_\eta\,\vec{u_x}$

5. En B.

6. $\vec{\Gamma}_s = m g r_s\,\vec{u_x}$.

7. $\sum \vec{\Gamma}_{\vec F} = \vec{0} = m_{jupe}\,g\,\dfrac{L_2 - L_1}{2}\,\vec{u_x} - \eta\,g\,r_\eta\,\vec{u_x} + m g\,r_s\,\vec{u_x}$.

$r_s = \dfrac{1}{m}\left[\eta\,r_\eta - m_{jupe}\,\dfrac{L_2 - L_1}{2}\right] = 28.6$ m.

Exercice 7.

1. Oz

2. $\vec{L} = m l^2 \dot{\theta}\, \vec{u_z}$.

$\vec{\mathcal{M}_L} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S C_L V_\eta^2}_{L}\, l\vec{u_r} \wedge \vec{e_\perp} = l L\, \vec{u_r} \wedge (\cos\alpha\, \vec{u_r} + \sin\alpha\, \vec{u_\theta})$.

$\vec{\mathcal{M}_L} = l L \sin\alpha\, \vec{u_z}$

$\vec{\mathcal{M}_D} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho S C_D V_\eta^2}_{D}\, l\vec{u_r} \wedge \vec{e_\parallel} = l D\, \vec{u_r} \wedge (\sin\alpha\, \vec{u_r} - \cos\alpha\, \vec{u_\theta})$.

$\vec{\mathcal{M}_D} = -l D \cos\alpha\, \vec{u_z}$

$\vec{\mathcal{M}_{\vec{T_e}}} = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}_{\vec{P}}} = l\vec{u_r} \wedge mg(-\sin\theta\, \vec{u_r} - \cos\theta\, \vec{u_\theta})$

$\vec{\mathcal{M}_{\vec{P}}} = -l m g \cos\theta\, \vec{u_z}$.

$\vec{\mathcal{M}_{\vec{F_i}}} = l\vec{u_r} \wedge (-m\dot{v_0})\, \vec{u_x} = l\vec{u_r} \wedge (-m\dot{v_0})(\cos\theta\, \vec{u_r} - \sin\theta\, \vec{u_\theta})$.

$\vec{\mathcal{M}_{\vec{F_i}}} = + l m \dot{v_0} \sin\theta\, \vec{u_z}$.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{ext}} \Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} = l L \sin\alpha - l D \cos\alpha - l m g \cos\theta + l m \dot{v_0} \sin\theta$.

$m l \ddot{\theta} = L \sin\alpha - D\cos\alpha - mg\cos\theta + m\dot{v_0}\sin\theta$.

3. $F_0 - T_e \cos\theta = 0$.

4. $L\cos\alpha + D\sin\alpha - mg\sin\theta - m\dot{V_0}\cos\theta - T_e = -l\dot{\theta}^2 m$.

5.
- On atteint $\theta = \pi/2$ => la voile se gonfle.
- Initialement $\theta = 0$ => voile à terre.
- Plus F_0 est gd, + ça gonfle vite.
- Quand θ est petit, ou proche de $\pi/2$, ça prend + de tps à changer (voir l'expression du moment des forces).