Institut Villebon Georges Charpak — 2023-2024
Sciences et Sport

Interrogation - Physique

Mardi 5 Décembre 2023

Durée : 3 heures (4 heures pour les tiers-temps).
ATTENTION : *s'il y a trop de flèches qui manquent sur les vecteurs, des points seront enlevés !*

Exercice 1 : Vrai ou Faux ($\sim$ 2 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est Vraie ou Fausse. Justifier *brièvement*.

1/ Un système non isolé peut avoir un mouvement circulaire.

2/ Le travail d'une force s'exprime en Joule.

3/ Deux vecteurs colinéaires ont un produit scalaire nul.

4/ Soit un satellite en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. La force de gravitation que la Terre exerce sur le satellite a un travail nul.

5/ Le moment cinétique d'un système est colinéaire à sa vitesse.

6/ Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ est orthogonal à $\overrightarrow{F}$.

7/ L'énergie mécanique d'un système est toujours constante au cours du temps.

8/ Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ dépend du point d'application de la force $\overrightarrow{F}$.

Exercice 2 : Bases, produit scalaire et produit vectoriel ($\sim$ 1.5 points)

Suivant les cas, $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ et $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ sont des bases orthonormées directes. Dans les calculs, vous ferez attention à ne pas confondre produit vectoriel et produit scalaire !

1/ Est-ce que $(\overrightarrow{u}_y, -\overrightarrow{u}_x, -\overrightarrow{u}_z)$ est une base directe ou indirecte ?

2/ Est-ce que $(\overrightarrow{u}_\theta, -\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ est une base directe ou indirecte ?

3/ $(2\overrightarrow{u}_x + 4\overrightarrow{u}_y - \overrightarrow{u}_z) \wedge (-\overrightarrow{u}_x + \overrightarrow{u}_y - 2\overrightarrow{u}_z)$

4/ $(\overrightarrow{u}_r + 3\overrightarrow{u}_\theta) \wedge (5\overrightarrow{u}_\theta - \overrightarrow{u_z})$

5/ $[(\overrightarrow{u}_x - 6\overrightarrow{u}_z) . \overrightarrow{u}_x]\, \overrightarrow{u}_x \wedge \overrightarrow{u}_y$

6/ $[\overrightarrow{u}_y . (\overrightarrow{u_y} - 8\overrightarrow{u}_z)]\, (3\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{u}_y)$

Exercice 3 : Patinoire à pigeons ($\sim$ 3.5 points)

L'hiver, on voit souvent des pigeons qui glissent sur des étendues d'eau glacée, où ils ont l'habitude de venir boire. On va considérer ici un pigeon qui arrive sur une étendue d'eau gelée avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle α par rapport à l'axe Ox (figure 1) et qui glisse dessus.

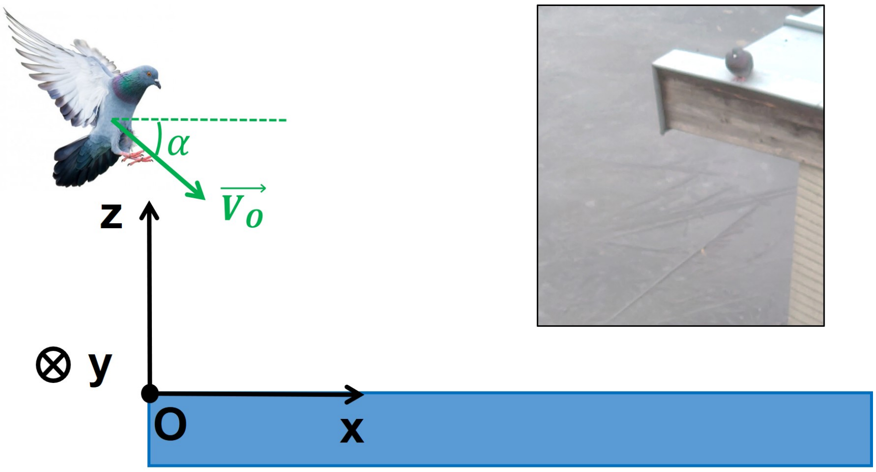

FIGURE 1 – Modélisation d'un pigeon arrivant sur la glace. Insert : pigeon contemplant un bassin d'eau glacée. Source : Le monde du stickers.

1/ Atterrissage du pigeon.

(a) Quelle est la vitesse du pigeon, juste après qu'il ait atterri sur le bassin ?

(b) Énoncer le principe d'inertie (ou 1^{ere} loi de Newton).

(c) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le pigeon, en négligeant les frottements. Quelle est leur résultante ?

(d) Quel est le mouvement du pigeon sur le bassin, sans action de sa part ?

(e) Que doit-il faire pour s'arrêter ?

2/ Freinage du pigeon. - On suppose désormais que le pigeon, de masse m, une fois arrivé sur le bassin horizontal, à $t = 0$, étend ses ailes pour que les frottements entre les ailes et l'air produisent une force $\overrightarrow{F} = -F\overrightarrow{u}_x$.

(a) Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.

(b) Déterminer l'énergie cinétique du pigeon à $t = 0$.

(c) Déterminer le travail des différentes forces qui s'exercent sur le pigeon lorsque le pigeon a parcouru une distance x sur le bassin.

(d) Déterminer l'expression littérale de la distance à laquelle le pigeon va s'arrêter.

(e) Pour s'arrêter plus vite, le pigeon a-t-il intérêt à atterrir sur l'eau glacée avec un angle α petit ou grand ?

Exercice 4 : Saut d'un building à l'autre ($\sim$ 3.5 points)

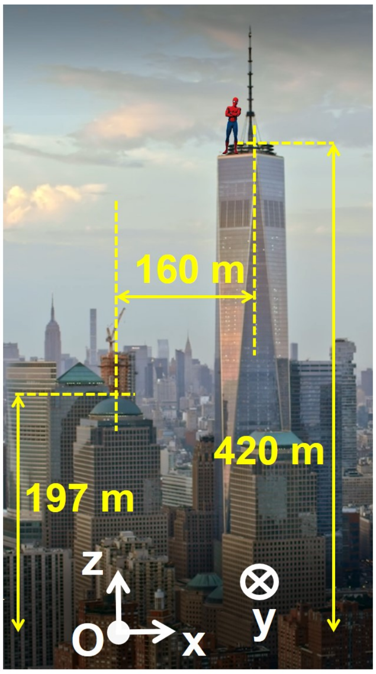

Figure 2 – Saut entre deux gratte-ciels. Source : SOM, Camo-Flauge.deviantart.com.

À New York, le One World Trade Center (420 m de hauteur) et le 225 Liberty Street (197 m de hauteur) sont deux gratte-ciels distants de 160 m. Spiderman veut sauter de l'un à l'autre en chute libre. On considérera le repère orthonormé $(Oxyz)$ comme indiqué figure 2. Son origine O se trouve au niveau du sol, à l'aplomb du 225 Liberty Street. On donne l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9.8$ m.s^{-2}.

1/ Spiderman s'élance du haut du One World Trade Center avec une vitesse $\vec{v_0} = v_{0,x}\vec{u}_x + v_{0,z}\vec{u}_z$. Déterminer l'équation de son mouvement $x(t)$ et $z(t)$ s'il est en chute libre (on négligera les frottements).

2/ Écrire les deux équations que doit vérifier la trajectoire pour que Spiderman atteigne le 225 Liberty Street.

3/ Déterminer l'expression littérale de la vitesse initiale $v_{0,x}$ que doit avoir Spiderman si $v_{0,z} = 0$ (attention au signe des vitesses !). La calculer numériquement. Cette vitesse vous paraît-elle réaliste ?

4/ Déterminer une vitesse initiale $v_{0,z}$ qui vous paraît réaliste et déterminer la vitesse $v_{0,x}$ correspondante pour que Spiderman puisse atteindre le 225 Liberty Street.

5/ D'après vous, Spiderman peut-il raisonnablement atteindre le 225 Liberty Street ?

Exercice 5 : Spiderman s'amuse ($\sim$ 5.75 points)

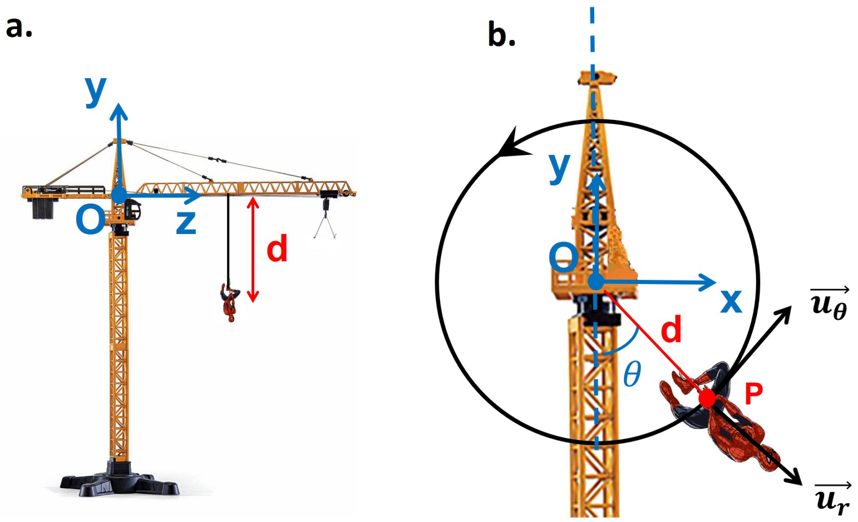

Figure 3 – Rotation de Spiderman autour d'une grue. a. Vue de côté. b. Vue de face. Sources : HiddenMatrixYT, Equipment Times.

Spiderman aime souvent tourner autour d'une grue de construction, attaché à un fil. On suppose que Spiderman a une masse $m = 70$ kg et qu'il est suspendu à une distance $d = 15$ m de la grue (figure 3).

1/ Rotation de Spiderman. - Dans cette question, on considérera que Spiderman n'a *pas* nécessairement un mouvement uniforme, ni un mouvement circulaire (r peut varier).

(a) Exprimer $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction de $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et θ.

(b) Exprimer $\overrightarrow{OP}$ dans la base ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$), puis dans la base ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$).

(c) Exprimer la vitesse du point P, $\vec{v}$, dans la base ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$), puis dans la base ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$).

(d) Exprimer l'accélération du point P, $\vec{a}$, dans la base ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$), puis dans la base ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$).

2/ Moment d'inertie de Spiderman. - On se place désormais dans le cas où Spiderman a un mouvement circulaire.

(a) Donner la définition du moment d'inertie d'un système.

(b) Donner le vecteur rotation de Spiderman en fonction de $\dot{\theta}$.

(c) Déterminer l'expression littérale du moment d'inertie I de Spiderman par rapport à son axe de rotation, puis sa valeur numérique (avec l'unité correspondante).

(d) Donner la définition du moment cinétique d'un système en fonction de son moment d'inertie I et de sa vitesse angulaire ω.

3/ Équation du mouvement.

(a) La tension du fil est-elle une force centrale (justifier) ?

(b) Faire le bilan des forces auxquelles Spiderman est soumis lorsqu'il tourne autour de la grue (on négligera les frottements).

(c) Donner la définition du moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe Oz.

(d) Déterminer le moment des différentes forces qui s'exercent sur Spiderman.

(e) Énoncer le théorème du moment cinétique pour un solide de moment d'inertie I tournant avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe Oz.

(f) Le moment cinétique de Spiderman change-t-il de direction ? En déduire que son mouvement est plan.

(g) En déduire l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ.

(h) Résoudre cette équation dans la limite des petits angles ($\sin\theta \simeq \theta$), si, à $t = 0$, Spiderman est à la verticale et a une vitesse angulaire ω_0.

(i) Quelle est l'expression littérale de la période du mouvement de Spiderman, dans cette limite ?

(j) Exprimer sa vitesse $\vec{v}$ dans la base ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$), en fonction de ω_0, d, g et du temps t.

(k) Commenter l'évolution de v lorsque d varie.

Exercice 6 : Rupture de la grue ($\sim$ 3.25 points)

Suite à un accident, les haubans (ce sont les gros câbles noirs visibles sur la figure 3.a) qui maintiennent l'équilibre de la grue rompent. La partie horizontale de la grue est alors en équilibre instable. On modélise la situation comme indiqué sur la figure 4 : la partie horizontale de la grue est une barre de section constante S, de longueur L et de masse M_{grue}. La grue a des longueurs L_1 et L_2 de part et d'autre de l'origine du repère O. On a donc $L = L_1 + L_2$, la longueur totale de la partie horizontale de la grue, supposée homogène. Un contre-poids de masse M est placée au point A, situé à une distance r_M fixée de O. Spiderman, de masse m, est suspendu à la grue au point B, situé à une distance r_S variable de O.

Données et notations :

- Masse de la partie horizontale de la grue : $M_{\text{grue}} = 500$ kg
- Masse du contre-poids : $M = 1000$ kg
- Masse de Spiderman : $m = 70$ kg
- Accélération de pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9.8$ m.s^{-2}
- $L_1 = 15$ m
- $L_2 = 55$ m
- $r_M = 12$ m

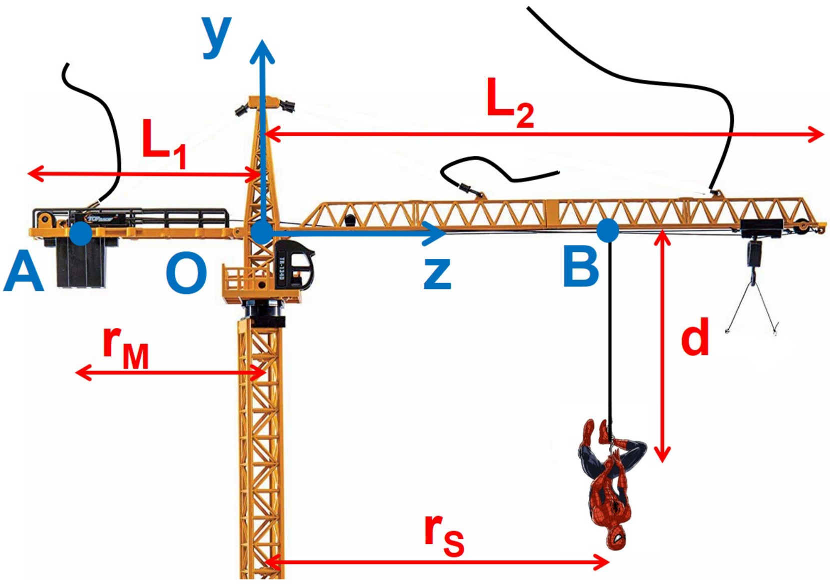

FIGURE 4 – Spiderman en équilibre instable sur la grue. Sources : HiddenMatrixYT, Equipment Times.

1/ Quel est l'axe de rotation de la grue dans ce cas ?

2/ Déterminer l'expression littérale de la masse linéique λ de la partie horizontale de la grue.

3/ Exprimer littéralement le moment $\vec{\Gamma}_{grue}$ du poids de la partie horizontale de la grue par rapport à O en fonction de L_1, L_2, m_{grue} et g.

4/ Exprimer littéralement le moment $\vec{\Gamma}_M$ du poids du contre-poids par rapport à O en fonction de r_M, M et g.

5/ En quel point est-ce que le poids de Spiderman exerce une force sur la grue ?

6/ Exprimer littéralement le moment $\vec{\Gamma}_S$ du poids de Spiderman par rapport à O en fonction de r_S, m et g.

7/ Quelle est la valeur de r_S pour que Spiderman puisse maintenir la grue en équilibre ? Vous donnerez l'expression littérale et ferez l'application numérique.

Exercice 7 : Parapente ($\sim$ 4.25 points)

On peut modéliser le gonflement d'une voile de parapente de masse m de la manière suivante (figure 5). Le pilote se situe au point O et court le long de l'axe Ox. On modélise sa force motrice par $\vec{F}_O = F_O \vec{e}_x$. Il subit une force $\vec{R}$ qui le maintient au sol. Par ailleurs, la force de poussée s'exerce au centre de la voile de parapente, au point M, et vaut :

$$\vec{L} = \frac{1}{2}\rho S C_L(\alpha) V_M^2 \vec{e}_\perp, \tag{1}$$

où ρ est la densité de l'air, S la surface de la voile, $C_L(\alpha)$ le coefficient de poussée, $\vec{V}_M$ la vitesse du point M et $\vec{e}_\perp$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{V}_M$, et α l'angle que fait $\vec{V}_M$ avec la voile. La force de traînée s'écrit :

$$\vec{D} = \frac{1}{2}\rho S C_D(\alpha) V_M^2 \vec{e}_\parallel, \tag{2}$$

avec $\vec{e}_\parallel$ le vecteur unitaire anti-parallèle à $\vec{V}_M$. La voile est attachée au pilote avec un câble rigide de longueur l qui exerce une tension $T_e = -T_e \vec{e}_r$ sur M. La voile subit par ailleurs une force d'inertie :

$$\vec{F}_i = -m\dot{V}_0 \vec{e}_x, \tag{3}$$

où V_0 est la vitesse du point O.

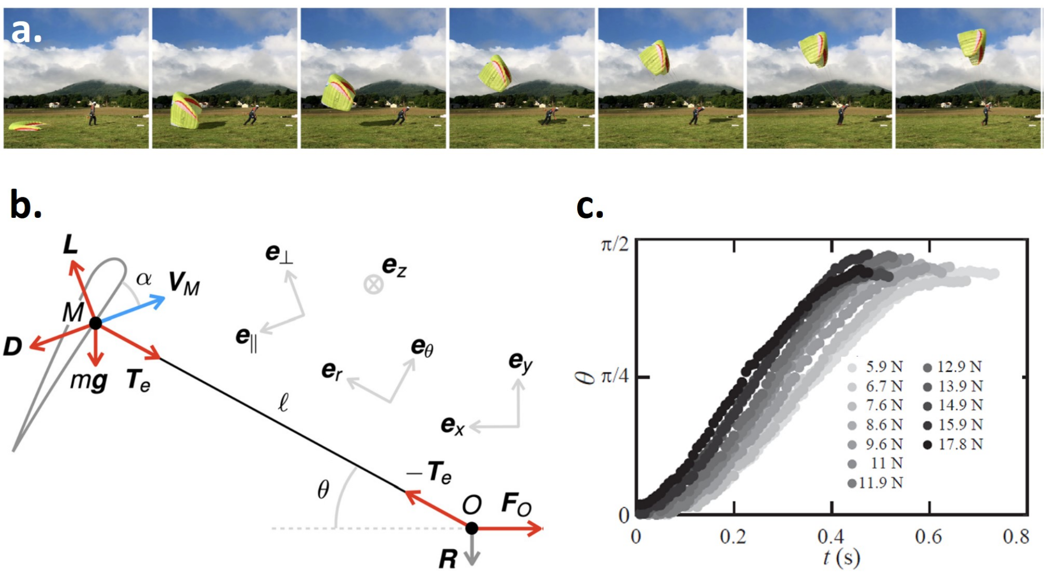

FIGURE 5 – a. Photos d'un gonflement d'aile de parapente. Les photos sont prises à intervalles réguliers de gauche à droite. b. Modélisation d'une voile de parapente. c. Trajectoire de l'aile de parapente pour plusieurs valeurs de la force motrice F_0. Ici $X = x/l$ et $Y = y/l$. Sources : Lopes et al., *American Journal of Physics* **91** 340 2023.

1/ Quel est l'axe de rotation de la voile ?

2/ Donner l'équation correspondant au théorème du moment cinétique appliqué en M.

3/ Donner l'équation correspondant au PFD appliqué au point O supposé sans masse, et projetée selon $\vec{e}_x$.

4/ Donner l'équation correspondant au PFD appliqué au point M, et projetée selon $\vec{e}_r$.

5/ La résolution de ces équations (non demandée) aussi bien que les expériences montrent que la trajectoire est de la forme du graphe donné figure 5.c. Commenter ce graphe autant que vous le pouvez : forme, valeurs limites, évolution en fonction de F_O, etc...