Exam 04 Janvier 2023

Ex 1 : Vrai ou Faux. (8x1/4) = 2

1) Faux : rectiligne unif. ou repos.
2) Faux : toutes.
3) Faux : c'est le produit scalaire qui est nul.
4) Faux : $\vec{T} \perp$ déplacement $\Rightarrow W_{\vec{T}} = 0$.
5) Vrai : $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$
6) Faux : $\vec{\Gamma}_{\vec{F}} = \vec{r} \wedge \vec{F}$.
7) Faux : que s'il n'y a pas de f. non conserv.
8) Faux : $\vec{\Gamma}_{\vec{F}} = \vec{r} \wedge \vec{F} \ \forall m$.

Ex 2 : Bases, ps, pv. (6x1/4) = 1.5

1) Indirecte
2) Indirecte.
3) $6\vec{u_z} + 3\vec{u_y} - \vec{u_z} - \vec{u_x} + 4\vec{u_y} - 8\vec{u_x} = \underline{-9\vec{u_x} + 7\vec{u_y} + 5\vec{u_z}}$.
4) $-2\vec{u_\theta} + 3\vec{u_\theta} = \underline{\vec{u_\theta}}$.
5) $\underline{-3\vec{u_y}}$
6) $\underline{-2\vec{u_z}}$.

Ex 3 : Freinage d'une roue de vélo (5.5)

1) Mouvement du point M.

(a) 1/4 $\vec{u_r} = \cos\theta\, \vec{u_x} + \sin\theta\, \vec{u_y}$

$\vec{u_\theta} = -\sin\theta\, \vec{u_x} + \cos\theta\, \vec{u_y}$.

1/4 (b) $\vec{OM} = r\vec{u_r} = r\cos\theta\, \vec{u_x} + r\sin\theta\, \vec{u_y}$.

1/2 (c) $\vec{v} = r\dot{\theta}\, \vec{u_\theta} = r\dot{\theta}\left(-\sin\theta\, \vec{u_x} + \cos\theta\, \vec{u_y}\right)$.

1/2 (d) $\vec{a} = r\ddot{\theta}\, \vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\, \vec{u_r} = r\ddot{\theta}\left(-\sin\theta\, \vec{u_x} + \cos\theta\, \vec{u_y}\right) - r\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\, \vec{u_x} + \sin\theta\, \vec{u_y}\right)$.

2) Moment d'inertie de la roue.

(a) $I = \sum_i m_i r_i^2$ (1/4) (b) Oz (1/4) (c) Cylindre vide. (1/4)

(d) $I = MR^2$. (1/2)

3) Freinage.

1/4 (a) $\vec{\Gamma}_{\vec{F}} = R\vec{u_y} \wedge F\vec{u_x} = \underline{-RF\,\vec{u_z}}$

(b) $I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\vec{F}_{ext}}$ (1/4)

1/2 (c) $I\ddot{\theta} = -RF$.

1 (d) $\dot{\theta} = -\dfrac{RF}{I}t + \omega_0$ $\qquad \theta = -\dfrac{RF}{2I}t^2 + \omega_0 t$.

1/2 (e) $\dot{\theta} = 0$ pour $t = \dfrac{I\omega_0}{RF}$ et alors $\theta = -\dfrac{\cancel{R}\cancel{F}}{2\cancel{I}}\dfrac{I^2\omega_0^2}{R^{\cancel{2}}F^{\cancel{2}}} + \dfrac{I\omega_0^2}{RF} = \dfrac{I\omega_0^2}{2RF}$.

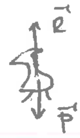
Si $\theta < 2\pi \Rightarrow \underline{F > \dfrac{I\omega_0^2}{4\pi R}} = \underline{\dfrac{MR\omega_0^2}{4\pi}} = \underline{12.15\,N}$.

1/4 (f) Pour une roue lenticulaire de même masse, le moment d'inertie est plus faible $\Rightarrow$ <u>F plus faible</u>.

Ex 4 : Scrat dansé sur la glace (5)

1) Glissade de Scrat sur la glace.

(1/4) a) Si $\vec F = \vec 0$ => mvt rect. unif.

b)  $\vec R + \vec P = \vec 0$. (1/4)

(1/2) c) ~~Alors~~ $\vec p_{final} = \vec p_{ini}$ => $(m_{gland} + m_s)\vec v_f = m_s \vec v_0$ => $\vec v_f = \frac{m_s}{m_{gland} + m_s}\vec v_0$ (= 4.95 m/s

2) Scrat s'accroche à son gland.

(1/4) a) $\vec T$ suivant $\vec u_r$ et indépdt de r => c'est une f. centrale.

(1/4) b) $\vec R + \vec P + \vec T = \vec T$.

(1/4) c) $\vec L = m\vec r \wedge \vec v$.

(1/4) d) $\vec\Gamma_{\vec F} = \vec r \wedge \vec F$.

(1/4) e) $\frac{d\vec L}{dt} = \sum \vec\Gamma_{\vec F}$.

(1/2) f) $\vec\Gamma_{\vec T} = \vec 0$ => $\frac{d\vec L}{dt} = \vec 0$ => $\vec L = cste$.

(1/2) g) Initialement $\vec L = m\vec r \wedge \vec v_0 \in Oxy$ => il le reste.

(1/2) h) Circulaire.

(1/2) i) $d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r v dt = \frac{L}{2m_s} dt = d\mathcal{A}$

(1/2) j) $T = \frac{2 m_s \pi R^2}{L} = \frac{2\pi R}{v} = T$

(1/2) k) $T = 0.75$ s.

Ex 5 : Chute de Scrat (5.5)

1) Chute libre.

(1/4) a) $\vec a = \frac{d^2\vec r}{dt^2} = \vec g = -g\vec u_r$

(1/4) b) $\vec v = -gt\,\vec u_r$.

(1/4) c) $\vec r = (R_T - \frac{1}{2}gt^2)\vec u_r$

(1/2) d) $\|\vec r\| = R_N$ pour $t = \sqrt{\frac{2(R_T - R_N)}{g}} = 1002\,s = 16.7\,min$.

2) Chute libre sous attraction terrestre.

(1/4) a) $\vec F = -\frac{m_s M_T G}{r^2}\vec u_r$

(1/4) b) $\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -\frac{M_T G}{r^2}\vec u_r$

(1/2) c) $\dot r \ddot r = -\frac{M_T G}{r^2}\dot r \longrightarrow \frac{1}{2}\dot r^2 = +\frac{M_T G}{r} - \frac{M_T G}{R_T} \longrightarrow v = \sqrt{2M_T G\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}\right)}$

(1/2) d) Quand r ↘, F ↗ => $\vec a$ ↗ => vitesse + gde que celle trouvée en 1).
↳ Suppose que M_T inchangée...

3) Effet des frottements.

(1/2) a) $\vec v$ ↗ => frottements fluides avec l'air ↗ => engendre un échauffement et une perte d'énergie par chauffage.

(1/2) b) $\vec F = m\vec g$ => $E_p = mg(r - R_T)$

(1/4) c) $\Delta E_m = W_{F.\,non\,cons}$.

(1/2) d) $\Delta E_m = \Delta E_p + \cancel{\Delta E_c} = W_{frott} = m_s g(R_N - R_T) < 0$.

(1) e) $\Delta T = \frac{W_{frott}}{m_s c} = \frac{g(R_N - R_T)}{c} = 11'480\,K$ => Scrat arrive carbonisé.

Ex 6 : Equilibre instable (5)

(1/4) 1) Oy.

(1/2) 2) $\vec{\Gamma}_{gland} = -d_1 \vec{u_x} \wedge (-m_{gland}\, g \vec{u_z}) = -d_1 m_{gland}\, g \vec{u_y}$.

(1/2) 3) $\vec{\Gamma}_B = + d_2 m_B g \vec{u_y}$.

(1) 4) $\vec{\Gamma}_a = -\frac{d_1}{2}\frac{\Pi_a d_1}{d_1+d_2} g \vec{u_y} + \frac{d_2}{2}\frac{\Pi_a d_2}{d_1+d_2} g \vec{u_y}$

$= \frac{\Pi_a g}{2(d_1+d_2)}(d_2^2 - d_1^2)\vec{u_y}$

$\vec{\Gamma}_a = \frac{1}{2}\Pi_a g (d_2 - d_1)\vec{u_y}$.

(1/2) 5) $\vec{\Gamma}_S = x\, m_S\, g \vec{u_y}$.

(3/4) 6) $\| \vec{\Gamma}_a + \vec{\Gamma}_B \| < 0$

$\frac{1}{2}\Pi_a \cancel{g}(d_2 - d_1) + d_2 m_B \cancel{g} < 0$

$\left(\frac{\Pi_a}{2} + m_B\right) d_2 < \frac{\Pi_a}{2} d_1$

(1) 7) $-d_1 m_{gland} + d_2 m_B + \frac{\Pi_a}{2}(d_2 - d_1) + \underbrace{x}_{d_2} m_S < 0$.

$d_2\left(m_B + m_S + \frac{\Pi_a}{2}\right) < d_1\left(m_{gland} + \frac{\Pi_a}{2}\right)$.

(1/2) 8) Tirer la bûche vers l'extérieur (i.e. $d_1 \nearrow$).