Institut Villebon Georges Charpak 2022-2023
Sciences et Sport

Interrogation - Physique

Mercredi 9 novembre 2022

Durée : 30 min (40 min pour les tiers-temps)

***ATTENTION :** s'il y a trop de flèches qui manquent sur les vecteurs, des points seront enlevés !*

Exercice 1 : Petites questions pour se mettre en jambe (8 points)

1/ Énoncer le théorème de l'énergie cinétique. La variation d'énergie cinétique d'un mobile entre deux points A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures s'appliquant sur le mobile sur le trajet considéré : $\Delta E_m = \Sigma W_{\vec{F}_{ext}}$.

2/ Soit un objet de masse de masse m, de centre de masse G repéré par rapport à l'origine O du repère choisi par le vecteur $\vec{r}$. S'il est animé d'une vitesse $\vec{v}$, quelle est l'expression littérale de son moment cinétique par rapport à O ? $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$.

3/ On lance simultanément de la même hauteur et sans vitesse initiale deux billes identiques, l'une de 1 kg et l'autre de 1 g. Quelle est celle qui touche le sol en premier ? Elles arrivent au sol simultanément.

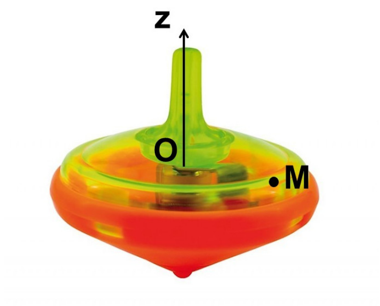

FIGURE 1 – Toupie. Photo : à la Porte Bleue.

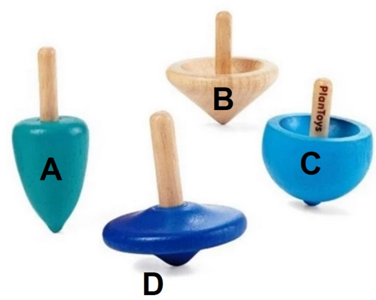

FIGURE 2 – Toupies de différentes formes. Photo : Manipani.

4/ On considère la toupie de la figure 1.a, en rotation autour de l'axe Oz vertical.

(a) Quelle est l'expression littérale du moment du poids ? $\vec{\Gamma}_P = \vec{r} \wedge m\vec{g}$.

(b) Quelle est la valeur du moment du poids ? $\vec{\Gamma}_P = \vec{0}$.

(c) Quelle est la valeur du moment de la réaction normale du support ? $\vec{\Gamma}_R = \vec{0}$.

(d) Énoncer le théorème du moment cinétique. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\vec{F}_{ext}}$

(e) En l'absence de frottement, le moment cinétique de la toupie change-t-il ? Non.

(f) Les toupies de la figure 2 sont supposées toutes avoir la même masse totale. Si elles sont lancées avec une force telle qu'elles ont toutes le même moment cinétique, quelle est celle qui, selon vous, aura la plus grande vitesse de rotation ? Justifier. $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Donc si toutes les toupies ont le même moment cinétique, plus elles ont un moment d'inertie I petit, plus la vitesse angulaire est grande. Sur la figure 2, c'est la toupie A qui tournera le plus vite.

Exercice 2 : Calcul (3 points)

Ici $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ est une base orthonormée directe. Dans les calculs, vous ferez attention à ne pas confondre produit vectoriel et produit scalaire !

1/ $4\overrightarrow{u}_r.2\overrightarrow{u}_\theta \ = 0$

2/ $\overrightarrow{u}_\theta.\left[(6\overrightarrow{u}_r + \overrightarrow{u}_\theta + 3\overrightarrow{u}_z) \wedge (\overrightarrow{u}_r + 2\overrightarrow{u}_z)\right] \ = -9$

3/ $(-\overrightarrow{u}_r - 3\overrightarrow{u}_\theta + 2\overrightarrow{u}_z) \wedge \overrightarrow{u}_z \ = \overrightarrow{u}_\theta - 3\overrightarrow{u}_r$

Exercice 1 : Exercice de boxe (12 points)

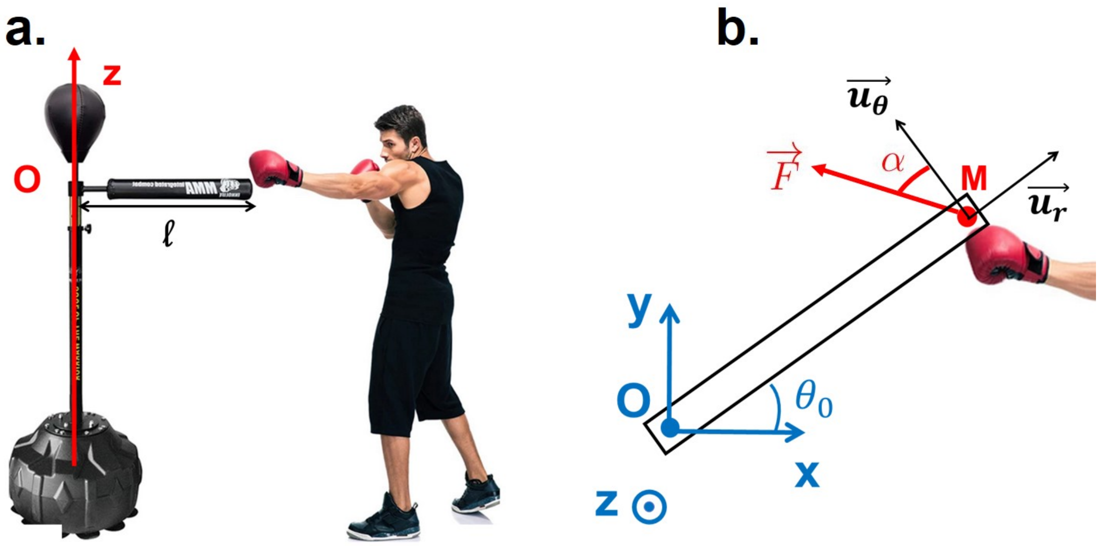

FIGURE 3 – a. Bâton de cible de réaction de boxe. N.B. Le punching ball ne joue aucun rôle dans le problème. Photo : AliExpress. b. Schématisation de la barre dans le plan Oxy.

On va étudier ici un bâton de cible de réaction de boxe (figure 3.a). Il s'agit d'un équipement pour l'entraînement à la boxe qui permet d'enchaîner les frappes et les évitements. Le boxeur frappe la barre qui tourne alors autour de son axe. Lorsqu'elle a fait un tour pour repasser par sa position initiale, le boxeur doit s'accroupir pour l'éviter.

Les deux questions sont essentiellement indépendantes.

1/ **Mouvement du bâton -** On considère le bâton de masse M et de longueur ℓ schématisé figure 3.b. Il est en rotation autour de l'axe Oz, perpendiculaire au bâton, et qui passe par l'une de ses extrémités O. Lorsque l'on regarde la barre par le dessus (l'observateur est alors placé à une altitude z>0), la barre tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

- **(a)** Donner l'expression littérale de sa masse linéique μ (masse par unité de longueur, dans le sens de la longueur) ? $\mu = \frac{M}{L}$.
- **(b)** Quelle est la définition du moment d'inertie d'un système ? $I = \sum m_i r_i^2$.
- **(c)** Calculer le moment d'inertie I du bâton en rotation autour de O. $I = \int_0^L \mu x^2 dx = \frac{1}{3} M\ell^2$.
- **(d)** Donner sans calcul la direction et le sens de son vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}$ et le définir. $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{u}_z$.
- **(e)** Montrer que l'expression littérale du moment cinétique du bâton par rapport au point O vaut : $\overrightarrow{L} = \frac{1}{3}M\ell^2\omega\overrightarrow{u}_z$. $\overrightarrow{L} = I\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{3}M\ell^2\omega\overrightarrow{u}_z$.
- **(f)** Donner l'expression littérale de l'énergie cinétique de rotation de la barre en fonction de M, ℓ et ω ? $E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}M\ell^2\omega^2$.

2/ Utilisation par le boxeur - Le boxeur donne un coup de poing à l'extrémité libre du bâton, avec une force $\vec{F}$ qui fait un angle α avec le vecteur de la base locale $\vec{u}_\theta$ comme schématisé figure 3.b. Il applique cette force sur le bâton pendant un temps Δt =0.1 s.

- **(a)** Donner l'expression littérale du moment de la force $\vec{F}$ par rapport au centre de rotation du bâton O en fonction de F, ℓ et α. $\vec{\Gamma}_F = \vec{r} \wedge \vec{F} = \ell F \cos\alpha \vec{u}_z$.
- **(b)** Comment le boxeur doit-il frapper le bâton pour lui donner la plus grande vitesse : avec α petit ou grand ? α petit, c'est-à-dire perpendiculairement au bâton.
- **(c)** Donner l'expression littérale du moment du poids du bâton par rapport à O. $\vec{\Gamma}_P = \vec{r} \wedge m\vec{g} = \frac{\ell}{2} mg \vec{u}_\theta$.
- **(d)** Le poids contribue-t-il à faire tourner le bâton dans le plan Oxy ? Non puisque le moment du poids est selon $\vec{u}_\theta$.
- **(e)** Déterminer l'équation différentielle sur ω sans la résoudre. Autrement dit, exprimer $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction des données du problème. Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{3} M\ell^2 \dot{\omega} = F\ell\cos\alpha$. D'où $\dot{\omega} = \frac{3F\cos\alpha}{M\ell}$.
- **(f)** Intégrer cette équation différentielle entre $t = 0$ et $t = \Delta t$ pour trouver la vitesse angulaire à laquelle le bâton tourne après avoir reçu le coup de poing. $\omega = \frac{3F\cos\alpha}{M\ell}\Delta t$.
- **(g)** En l'absence de frottement, la vitesse de rotation du bâton autour de l'axe Oz varie-t-elle varier après le coup de poing ? Non : le boxeur n'exerce plus de force sur le bâton. Ainsi, la vitesse de rotation est constante après le coup de poing.
- **(h)** Si le boxeur ne bouge pas, à quelle instant t_1 devra-t-il esquiver le bâton ? $\omega = \frac{2\pi}{t_1}$. D'où $t_1 = \frac{2\pi M\ell}{3F\cos\alpha\Delta t}$.